



Facultad de Ciencias

# Estudio de algunas ecuaciones en derivadas parciales utilizadas para describir la difusión de partículas

(Study of some partial differential equations used for describing the diffusion of particles)

Trabajo de Fin de Grado para acceder al  
GRADO EN MATEMÁTICAS

Autora: Lucía Pascual Martínez

Directora: Diana Stan

Junio 2021

# Agradecimientos

Gracias a mi directora de TFG Diana Stan por guiarme y dedicarme tiempo a lo largo de estos meses.

Gracias a mis amigos y compañeros que me han acompañado durante la carrera, por hacer este tiempo más ameno.

Gracias a mis padres y a mi hermano, por su apoyo incondicional y su cariño.

# Resumen

El objetivo principal de este trabajo es el estudio de ecuaciones en derivadas parciales que modelan procesos de difusión y de reacción-difusión. Se estudiará la solución de la ecuación de difusión desde una interpretación probabilística mediante el movimiento Browniano.

Por otro lado, se estudiará con detalle la Ecuación del Calor, un modelo básico de ecuación de difusión lineal, mediante el cálculo de la llamada solución fundamental de esta ecuación que resultará de gran utilidad para encontrar soluciones a distintos Problemas de Cauchy para la Ecuación del Calor. Además, se analizará la existencia y unidad de soluciones.

Por último, se introducirá un ejemplo de ecuación de reacción-difusión no lineal, la ecuación de Fisher-KPP que se utiliza para modelar la propagación de especies. Centraremos el estudio en la búsqueda de soluciones de tipo onda viajera y en el problema de existencia de soluciones. Veremos que podremos garantizar esta existencia en un espacio de Banach determinado.

**Palabras clave:** Ecuación de difusión, caminata aleatoria, Ecuación del Calor, solución fundamental de la Ecuación del Calor, Ecuación de Fisher-KPP, onda viajera, espacio de Banach.

# Abstract

The aim of this paper is to study some partial differential equations that model diffusion and reaction-diffusion phenomena. We will study the solution of the diffusion equation from a probabilistic interpretation through the Brownian motion.

On the other hand, we will study the Heat Equation, a basic linear diffusion model, through the calculus of the fundamental solution of the Heat Equation, which will be very useful for finding solutions of several Cauchy Problems of the heat equation. In addition, the existence and uniqueness of solutions will be analyzed.

Lastly, we will introduce an example of a nonlinear reaction-diffusion equation: the Fisher-KPP equation, used for describing the propagation of species. We will focus our study on searching for travelling waves solutions and on the problem of the existence of solution. We will see that we will be able to guarantee a solution on a certain Banach space.

**Key words:** Diffusion equation, random walk, Heat equation, fundamental solution of the Heat Equation, Fisher-KPP equation, travelling wave, Banach space.



---

# ÍNDICE GENERAL

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Estudio de un modelo de difusión</b>	<b>3</b>
2.1. El proceso de difusión.	3
2.2. Caminata aleatoria y su relación con el fenómeno de difusión	4
2.3. Interpretación probabilística de un proceso de difusión	4
2.3.1. Un enfoque discreto de la caminata aleatoria	4
2.3.2. Paso a continuo, la ecuación de difusión	12
2.4. La ley de Fick	13
<b>3. Ecuación del Calor</b>	<b>17</b>
3.1. La Ecuación del Calor	17
3.1.1. Historia de la Ecuación del Calor	17
3.1.2. Interpretación de la Ecuación del Calor	18
3.1.3. Presentación del problema a estudiar	18
3.2. Solución fundamental	19
3.2.1. Cálculo de la solución fundamental	19
3.2.2. Problema de Cauchy para la Ecuación del Calor	23
3.2.3. Ecuación del Calor no homogénea	27
3.3. Unicidad de soluciones	32
3.3.1. Ejemplo de Tikhonov	34
<b>4. Ecuación de Fisher-KPP</b>	<b>37</b>
4.1. Modelo logístico	37
4.2. Ecuación de Fisher-KPP	38
4.3. Soluciones de tipo onda viajera	38
4.3.1. Ondas viajeras	38
4.3.2. Solución de tipo onda viajera de la ecuación de Fisher-KPP	39
4.4. Existencia de solución	42
<b>Bibliografía</b>	<b>52</b>
<b>A. Otros resultados</b>	<b>I</b>
<b>B. Convolución</b>	<b>V</b>
B.1. Propiedades de la convolución	V
B.1.1. Derivada de una convolución	VI

<b>C. Delta de Dirac</b>	<b>IX</b>
C.1. Delta de Dirac en $n$ dimensiones . . . . .	X
C.2. Otras propiedades de la Delta de Dirac . . . . .	XI
<b>D. Coordenadas polares en <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>XIII</b>
D.1. Medida de la esfera unidad en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	XVI
<b>E. Método del punto Fijo</b>	<b>XVII</b>
<b>F. Espacios de Banach</b>	<b>XIX</b>

---

# CAPÍTULO 1

---

## INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones en derivadas parciales sirven para describir multitud de sistemas físicos. El comportamiento de cantidades físicas y matemáticas que se pueden representar mediante una función de una o más variables, puede ser caracterizado, con frecuencia, mediante una ecuación que involucre algunas de las derivadas parciales de dicha función.

Existen tres ejemplos clásicos de ecuaciones en derivadas parciales: Ecuaciones de tipo hiperbólico (se utilizan para modelar fenómenos oscilatorios, vibraciones de cuerdas, membranas..), Ecuaciones de tipo parabólico (modelan procesos de difusión o conductividad térmica) y Ecuaciones de tipo elíptico (modelos estacionarios). En este trabajo nos centraremos en una clase importante de las EDPs, las ecuaciones parabólicas. En concreto, vamos a realizar un estudio de la ecuación de difusión:

$$u_t - \Delta u = 0. \quad (1.1)$$

donde  $u(x, t)$  denota, de manera general, la densidad/concentración de un líquido, una sustancia, una población... en un tiempo  $t \geq 0$  y una ubicación espacial  $x \in \mathbb{R}^n$ .

En el segundo capítulo (2) realizaremos un estudio del modelo de difusión desde una interpretación probabilística. La ecuación de difusión está relacionada con el estudio del movimiento Browniano de las partículas, un ejemplo de caminata aleatoria que se encuentra dentro de los procesos estocásticos más simples. Describe los movimientos aleatorios que realizan las partículas de una sustancia, como resultado de choques contra muchas moléculas que se encuentran dentro de un mismo fluido.

Comenzaremos detallando un enfoque discreto de la caminata aleatoria, suponiendo que una sola partícula de una sustancia se mueve, de manera aleatoria, a lo largo de una línea recta en un número fijo de pasos  $\Delta x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) que realiza en una cantidad fija de tiempo  $\Delta t$  ( $t > 0$ ). Mediante el cálculo de la probabilidad de que dicha partícula se mueva  $m$  pasos de espacio a la derecha en  $n$  unidades de tiempo ( $p(m, n)$ ) ( $m, n \in \mathbb{N}$ ) y, tomando  $n$  suficientemente grande, llegaremos a concluir que dicha probabilidad se asemeja a la función de Distribución Normal o Distribución Gaussiana.

Generalizando la anterior probabilidad al caso continuo (para cualquier punto general) obtenemos que esta probabilidad se define según la siguiente ecuación:

$$u(x, t) = \left( \frac{1}{4\pi Dt} \right)^{1/2} e^{-x^2/(4Dt)}. \quad (1.2)$$

llamada solución fundamental de la ecuación de difusión y, en concreto, de la Ecuación del Calor, donde  $D$  es el coeficiente de difusión de las partículas.

Por último, enfocaremos la ecuación de difusión (1.1) desde el punto de vista de la Ley de Fick, la cual postula que el flujo de una materia va desde una región de alta concentración hacia una región de baja concentración y que, además, dicho flujo es proporcional al gradiente de concentración del material.

En el tercer capítulo (3) nos centraremos en la Ecuación del Calor, un modelo básico de la ecuación de difusión lineal (1.1), en el que  $u(x,t)$  representa la temperatura de un material en un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  en un determinado tiempo  $t > 0$ .

Nos centraremos en calcular una solución específica de dicha ecuación en  $\mathbb{R}^n$ , la llamada solución fundamental de la Ecuación del Calor (1.2) con  $D = 1$ . Esta solución fundamental nos será útil, gracias a sus numerosas propiedades, para calcular una solución del Problema de Cauchy para la Ecuación del Calor homogénea y no homogénea en  $n$  dimensiones.

Debido a que la solución fundamental es invariante por traslaciones, podremos utilizar el concepto de convolución de dos funciones para encontrar un candidato a solución del Problema de Cauchy de la Ecuación del Calor homogénea con una condición inicial. Además, veremos que dicha condición inicial se aproxima a la delta de Dirac en  $\mathbb{R}^n$  cuando el tiempo se aproxima a cero. Siguiendo un razonamiento parecido, buscaremos una solución del Problema de Cauchy de la Ecuación del Calor no homogénea con una condición inicial, esta vez nos apoyaremos en el llamado Principio de Duhamel, un método similar al método de variación de parámetros para las EDO, que nos permite encontrar soluciones a problemas no homogéneos con una condición inicial si se conoce una solución del problema homogéneo.

Por último, centraremos nuestro estudio en la existencia y unicidad de soluciones mediante el Principio del Máximo, que nos garantiza la existencia y unicidad de solución bajo una cierta condición de crecimiento. A continuación, introduciremos el denominado *Ejemplo de Tikhonov* que construye infinitas soluciones del Problema de Cauchy de la Ecuación del Calor homogénea con una condición inicial. Este ejemplo entra en aparente contradicción con la demostración de existencia y unicidad de solución para este tipo de problemas, aunque veremos la posible explicación de este fenómeno.

En los dos primeros capítulos del trabajo, introduciremos el ejemplo de ecuación en derivadas parciales lineal que describe el modelo de difusión o calor. Sin embargo, existe una amplia variedad de sistemas físicos que no se pueden describir mediante EDP lineales. Es por ello, que hemos dedicado el cuarto y último capítulo (4) al estudio de las ecuaciones de reacción-difusión no lineales. El famoso trabajo de Kolmogorov, Petrovskii y Piskunov (KPP) conduce a la ecuación de reacción-difusión más sencilla:

$$u_t - \Delta u = f(u).$$

donde  $u$  es la concentración de una sustancia en una dimensión espacial y  $f(u)$  es el término de reacción. En concreto, nos centraremos en la elección de la función  $f(u) = u(1 - u)$ , que realizó Fisher para modelar la propagación de especies. En efecto, veremos que este término de reacción se relaciona directamente con la función logística que estudia el crecimiento de poblaciones o enfermedades infecciosas.

Primero, introduciremos el concepto de onda viajera y estudiaremos si la ecuación de Fisher admite este tipo de soluciones mediante la estabilidad de los puntos críticos del sistema y la construcción del mapa de fases y las trayectorias para los diferentes casos.

Finalmente, estudiaremos la existencia de solución para el Problema de Cauchy no lineal con una condición inicial. Comenzaremos estudiando la existencia para un problema general y acabaremos probando los resultados para la ecuación de Fisher-KPP.

En este estudio de existencia de soluciones serán importantes los conceptos de condición de Lipschitz y espacio de Banach. Tal y como veremos, nos será posible garantizar la existencia de solución para funciones que satisfagan la condición de Lipschitz, de forma local, en un espacio de Banach formado por el conjunto de funciones continuas definidas en un intervalo  $[0, T]$  y que toman valores en otro espacio de Banach  $B$ , compuesto por funciones continuas y acotadas. Definiremos una norma para cada uno de estos espacios de manera que ambos sean, efectivamente, espacios de Banach para dichas normas.



---

---

# CAPÍTULO 2

---

## ESTUDIO DE UN MODELO DE DIFUSIÓN

En un modelo de difusión, por ejemplo, la propagación de calor de manera uniforme desde una olla caliente en el centro de una habitación vacía hacia el resto de la habitación, las partículas se mueven en cualquier dirección. En este capítulo estudiaremos la propagación de una única partícula situada en la fuente de calor u olla caliente que mencionábamos previamente, mediante la realización de un modelo matemático que describa el movimiento de la partícula en un tiempo  $t$  y una posición en espacio  $x$ . Estudiando este proceso de manera probabilística obtendremos un modelo discreto que, posteriormente, convertiremos en un modelo continuo (para toda variable en  $\mathbb{R}$ ) obteniendo una solución de una ecuación en derivadas parciales que modela los procesos de difusión, a partir de la cual se podrán estudiar las propiedades del conjunto de partículas que componen el proceso de difusión al completo.

### 2.1. El proceso de difusión.

En general, la difusión es la propagación espontánea de calor o materia. Se entiende también por difusión al movimiento de las partículas, desde un área de concentración alta hacia una región de concentración baja.

Ilustremos este proceso mediante un experimento extraído del libro de Crank [10, pag:1-2]:

Supongamos que disponemos de un recipiente cilíndrico alto cuya parte inferior contiene, por ejemplo, una solución de yodo y, a continuación, una columna de agua clara se vierte encima despacio y con cuidado para que no haya corrientes de convección.

Al principio la parte coloreada (yodo) está separada de la clara (agua) por un límite bien definido. Lentamente, se empieza a observar como el agua se oscurece mientras que el color de la parte inferior del recipiente comienza a desvanecerse. Cuando haya transcurrido el tiempo suficiente, toda la solución tendrá un color uniforme. Por lo tanto, hay una transferencia de partículas de yodo de la parte inferior del recipiente a la parte superior. Se dice entonces que el yodo se ha difundido en el agua.

Si fuera posible estudiar individualmente a las moléculas de yodo, se observaría que el movimiento de cada una de ellas es aleatorio. En una solución diluida cada partícula se comporta de manera independiente al resto. Sin embargo, las partículas chocan constantemente entre sí provocando que cada molécula se mueva a veces hacia una región de alta concentración, otras veces hacia áreas de baja concentración... no teniendo una preferencia en la dirección de movimiento hacia uno u otro.

El movimiento de una sola partícula puede describirse en términos de la *caminata aleatoria o random walk*, un proceso aleatorio en el cual el movimiento de cada partícula es suficientemente errático como para poder ser considerado aleatorio.

## 2.2. Caminata aleatoria y su relación con el fenómeno de difusión

Las caminatas aleatorias se engloban dentro de los procesos estocásticos, los cuales se centran en el estudio y modelización de sistemas que evolucionan a lo largo del tiempo de forma aleatoria.

Supongamos que se quiere estudiar el número de personas que asisten a un supermercado en un intervalo de tiempo determinado. Si establecemos dicho tiempo como una hora podemos definir una variable aleatoria “Número de personas que llegan al supermercado en una hora”. Si en lugar de una hora tomamos dos, está claro que el número de personas que llegan será mayor y, por tanto, la distribución de probabilidad de esta nueva variable aleatoria será distinta a la anterior. Así, podemos definir una familia de variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  que dependen de la variable tiempo, de manera que  $X_t$  se define como el número de personas que llegan en el intervalo  $(0, t)$ . Este ejemplo describe un proceso estocástico.

Ahora, consideremos el recorrido aleatorio de una partícula de una sustancia que parte de un punto inicial  $x_0$  y que se desplaza mediante pasos unitarios a izquierda o derecha. Desde el punto de vista de un proceso estocástico, consideramos que este recorrido aleatorio está representado por una sucesión de variables aleatorias  $X_n$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Dichas variables son independientes e idénticamente distribuidas. A este hecho se le denomina caminata aleatoria, el cual estudiaremos con mayor profundidad en la siguiente sección.

Veamos ahora su relación, a lo largo de la historia, con los procesos de difusión (ver artículo [23]):

En los primeros estudios de la Teoría de Difusión, esta se desarrolló para tratar de resolver problemas relacionados con la conducción, pero luego fue dirigido hacia el Movimiento Browniano.

La primera vez que se describió el movimiento Browniano fue en 1827 por el inglés Robert Brown cuando estaba observando, a través del microscopio, partículas de Polen en suspensión en un líquido. Observó que los granos de polen no permanecían estáticos sino que estaban sometidos a una trayectoria errática, de modo que cada uno se desplazaba en una dirección diferente. [8, (pág.466-467)].

Poco después, fue hallada una explicación a dicho fenómeno de manera cualitativa: Un grano de polen o de polvo suspendido en el fluido está sometido al bombardeo continuo de las moléculas de este. El efecto de una sola partícula de fluido sobre la partícula en suspensión no es lo suficientemente fuerte como para que pueda ser recogido en un microscopio, pero cuando muchas moléculas chocan con la partícula en la misma dirección y de manera simultánea, entonces es observable su trayectoria.

No fue hasta 1905, un siglo después, cuando Albert Einstein dio una respuesta a dicho fenómeno de manera cuantitativa. Construyó un modelo matemático llamado *Movimiento Browniano*. [11]

Bajo las hipótesis de que el desplazamiento de cada partícula es independiente del resto y de que, de manera similar, el movimiento de una única partícula entre dos instantes es independiente de las posiciones anteriores en las que se haya encontrado, Einstein demostró que la función de distribución de la posición de la partícula tenía que verificar la siguiente ecuación

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}.$$

donde  $x$  es la variable de espacio,  $t$  la variable de tiempo y  $D$  una constante adecuada. Dicha ecuación es conocida como *Ecuación de difusión*.

En este primer capítulo llegaremos a esta ecuación estudiando el movimiento de una sola partícula, tal y como realizó en su momento Einstein.

Cabe mencionar que el movimiento Browniano no es más que un ejemplo de caminata aleatoria.

## 2.3. Interpretación probabilística de un proceso de difusión

### 2.3.1. Un enfoque discreto de la caminata aleatoria

Como hemos mencionado previamente, cuando el movimiento microscópico irregular de las partículas resulta en un movimiento macroscópico y regular del grupo, podemos pensar en ello como un proceso de difusión. Obtener el comportamiento macroscópico de las partículas a partir del conocimiento microscópico individual es complicado, por lo tanto derivamos una ecuación de un modelo continuo para el comportamiento global en términos de densidad o concentración de partículas. Es instructivo comenzar con un proceso aleatorio el cual

estudiaremos de una manera probabilista. Basaremos este estudio en el libro de Murray [21, pág.395-399].

Para simplificar consideremos inicialmente el movimiento uni-dimensional guiado por la *caminata aleatoria o random walk*.

Así, supongamos que una partícula se mueve, de manera aleatoria, a lo largo de una línea recta hacia adelante o hacia atrás en un número fijo de pasos  $\Delta x$  que se realizan en una cantidad de tiempo fija  $\Delta t$ . Si el movimiento es imparcial es igualmente probable que la partícula de un paso hacia su izquierda o su derecha.

Si tomamos la posición inicial de la partícula como el origen (lo cual en el proceso de difusión es evidente puesto que queremos estudiar la propagación de la partícula desde, por ejemplo una fuente de calor, hacia el resto del espacio), tras un tiempo  $N\Delta t$  la partícula puede estar en cualquier posición desde  $-N\Delta x$  hasta  $N\Delta x$ . Asumiendo que se mueve un paso en una unidad de tiempo, buscamos la probabilidad  $p(m,n)$  de que una partícula alcance un punto  $m$  pasos de espacio a la derecha, es decir, alcance el punto  $m\Delta x$ , en  $n$  pasos de tiempo (esto es, tras un tiempo  $n\Delta t$ ) donde  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

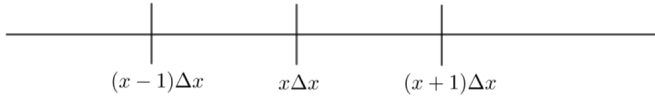


Figura 2.1: Representación de la malla en la que la partícula, que se encuentra en la posición  $x\Delta x$ , se puede mover a la izquierda o a la derecha.

Por ejemplo, supongamos que nos encontramos en el momento  $t=0$ , donde la partícula está situada en la posición  $x\Delta x$  y que  $m=n=1$ , es decir, queremos calcular la probabilidad de que se mueva un paso hacia la derecha ( $m=1$ ) en una unidad de tiempo ( $n=1$ ).

Dicha partícula tras una unidad de tiempo solo puede dar un único paso a la izquierda o a la derecha, tal y como se muestra en la Figura 2.1.

Por tanto, la probabilidad que estamos buscando

viene dada, por definición, como el número de casos favorables, es decir, que la partícula se mueva hacia la derecha, entre el número de casos posibles, esto es, las direcciones posibles que puede tomar la partícula (izquierda y derecha). Así,  $p(1,1) = p((x+1)\Delta x, 1) = 1/2$ .

#### A partir de ahora, consideramos $n$ , el número de pasos de tiempo, fijo.

Para  $m$  general y  $n$  fijo donde  $m, n \in \mathbb{Z}$  se tiene que  $m \in [-n, n]$  puesto que el número máximo de posibles pasos que puede dar la partícula hacia la derecha es  $n$ , en el caso de que esta no se mueva en ningún momento hacia la izquierda. Análogamente, el número máximo de pasos hacia la izquierda será  $-n$ . Si no pusiéramos esta condición e intentáramos, por ejemplo, calcular  $p(10,5)$ , que es la probabilidad de dar 10 pasos a la derecha en 5 unidades de tiempo, es evidente que no daría tiempo a moverse ese espacio en el tiempo indicado, por tanto,  $p(10,5) = 0$ . Y, análogamente, para cada probabilidad donde  $m > n$  o  $m < -n$ .

Ahora, supongamos que la partícula se ha desplazado  $a$  pasos a la derecha y  $b$  pasos a la izquierda hasta alcanzar el punto  $m\Delta x$ . Entonces

$$m = a - b, \quad n = a + b \Rightarrow a = \frac{n + m}{2}, \quad b = n - a. \quad (2.1)$$

donde  $m$ , al ser el número de pasos de espacio a la derecha que la partícula alcanza, debe ser la resta de los pasos a la derecha menos los pasos a la izquierda y  $n$ , que son los pasos de tiempo en los que la partícula alcanza el punto deseado, debe ser la suma de los pasos realizados, tanto a izquierda como a derecha, ya que la partícula se mueve un paso en una unidad de tiempo.

Procedamos al cálculo de la probabilidad  $p(m,n)$ . Recordemos la regla de Laplace para el cálculo de una probabilidad

$$p(m,n) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}. \quad (2.2)$$

El número de casos favorables es el número de posibles caminos que puede tomar una partícula para alcanzar el punto  $m\Delta x$ . Recordemos que tomamos un número fijo de pasos de tiempo  $n$ , entonces la partícula podría dar, como mucho,  $n$  pasos de espacio tanto a la izquierda como a la derecha. Por tanto, una vez que sepamos la cantidad de pasos que se mueve hacia la derecha, podemos deducir los pasos hacia la izquierda y viceversa. Así, nos basta con saber el número de posibles pasos a la derecha que puede tomar la partícula hasta alcanzar

el punto  $m\Delta x$  (de los  $n$  posibles) para calcular el número de casos favorables. Este número viene dado por:

$$\binom{n}{a} = \frac{n!}{a!(n-a)!} = C_a^n. \quad (2.3)$$

donde  $C_a^n$  es el coeficiente binomial definido por:

$$(x+y)^n = \sum_{a=0}^n C_a^n x^{n-a} y^a. \quad (2.4)$$

Además, teniendo en cuenta la ecuación (2.1) tenemos

$$\binom{n}{a} = \frac{n!}{a!(n-a)!} = \frac{n!}{a!b!}.$$

Por otro lado, el número de casos posibles será el número total de posibles caminos que puede realizar la partícula en las  $n$  unidades de tiempo fijadas anteriormente. Veamos que este número es  $2^n$ :

Si tomamos una partícula en el momento  $t=0$  en la posición  $x\Delta x$  y añadimos una unidad de tiempo ( $t=1$ ) entonces la partícula se habrá movido una posición a la izquierda  $(x-1)\Delta x$  o a la derecha  $(x+1)\Delta x$ . Así, el número de caminos posibles para  $t=1$  es 2.

Análogamente, si añadimos otra unidad de tiempo ( $t=2$ ) debemos distinguir dos casos:

- La partícula se encuentra en el momento  $t=1$  en la posición  $(x-1)\Delta x$ , desde donde se puede desplazar hacia la izquierda  $(x-2)\Delta x$  o a la derecha  $x\Delta x$ .
- La partícula se encuentra en el momento  $t=1$  en la posición  $(x+1)\Delta x$ , desde donde se puede desplazar hacia la izquierda  $x\Delta x$  o a la derecha  $(x+2)\Delta x$ .

Por lo tanto, el número de caminos posibles para  $t=2$  es  $4=2^2$ .

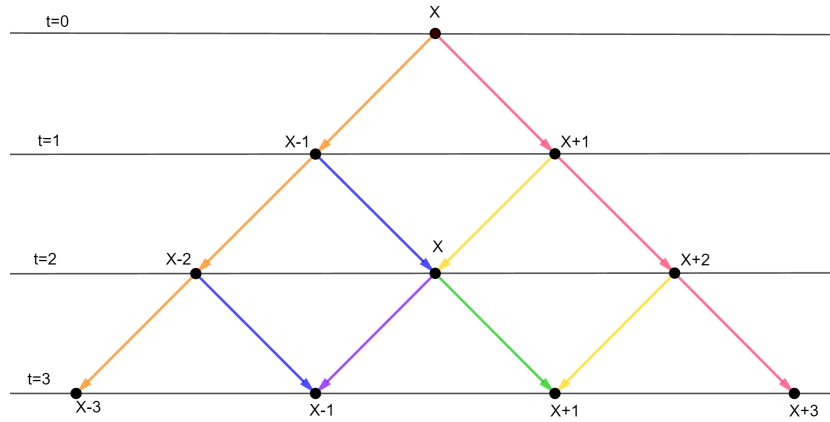


Figura 2.2: Representación del número total de caminos posibles para  $t=0,1,2,3$ .

Calculamos, entonces, el número total de posibles caminos para  $t=n$ . Supongamos, por inducción, que lo explicado anteriormente es cierto para  $t=n-1$ , es decir, que el número total de caminos posibles para este tiempo fijo es  $2^{n-1}$ . Ahora, si aumentamos el tiempo en una unidad ( $t=n$ ), de cada uno de los anteriores caminos se distinguen dos nuevos. Esto puede apreciarse claramente en la figura 2.2 para  $t=0,1,2,3$ . Por tanto, el número total de caminos posibles para  $t=n$  es:

$$2^{n-1} \cdot 2 = 2^n. \quad (2.5)$$

Volviendo al cálculo de la probabilidad  $p(m, n)$ , si recordamos la ecuación (2.2), e incorporamos lo visto en las ecuaciones (2.1), (2.3) y (2.5) tenemos:

$$p(m, n) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{\frac{n!}{a!(n-a)!}}{2^n} = \frac{1}{2^n} \frac{n!}{a!(n-a)!}, \quad a = \frac{n+m}{2}. \quad (2.6)$$

Cabe mencionar que  $n-m$  es un número par, es decir,  $n$  y  $m$  tienen la misma paridad. La comprobación es inmediata si  $n=m$ , sin embargo, veamos que ocurre si  $n>m$ :

Buscamos la probabilidad de que una partícula se mueva  $m$  pasos de espacio a la derecha desde el origen. Cuando se mueve hacia la derecha hasta alcanzar el punto  $m\Delta x$  si, en un cierto punto, la partícula se desplaza a la izquierda, esta debe volver hacia la derecha en algún momento. Digamos, por ejemplo, que la partícula se mueve solamente una posición a la izquierda en el punto  $h\Delta x$  (se mueve a  $(h-1)\Delta x$ ) donde  $h<m$  y  $h$  se encuentra en el camino para alcanzar el punto  $m\Delta x$ , a partícula se moverá inmediatamente a la derecha, otra vez hasta el punto  $h\Delta x$ , para poder alcanzar la posición deseada. Así, cada paso a la izquierda genera un paso a la derecha. Apoyándonos en la ecuación (2.1)

$$n - m = (a + b) - (a - b) = 2b = 2 \times \text{pasos a la izquierda}.$$

De igual manera, al tener  $n$  y  $m$  la misma paridad,  $n+m$  es también un número par.

Por tanto, el número  $a$ , por la ecuación (2.1), es un número entero, lo cual es lógico teniendo en cuenta que estamos refiriéndonos a  $a$  como el número de pasos a la derecha que toma la partícula en una malla (ver figura 2.1). Análogamente podemos usar este mismo razonamiento para el número de pasos a la izquierda  $b$ .

Finalmente, habiendo calculado la probabilidad que buscábamos, debemos asegurarnos de que esta es, de hecho, una función de probabilidad. Una función  $P$  es una función de probabilidad si satisface las siguientes condiciones:

- *Un valor de probabilidad debe ser no negativo*

$$P(B) \geq 0.$$

*para cualquier evento  $B$*

Tal y como hemos definido nuestra función de probabilidad  $p(m,n)$ , se verifica fácilmente que no va a existir ninguna probabilidad negativa, ya que estamos hablando de una distancia realizada en un tiempo determinado.

- *La suma de todas las probabilidades a través de todos los espacios posibles en el espacio de resultados debe ser 1*

$$\sum_{m=-n}^{m=n} p(m, n) = 1.$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.6) tenemos

$$\sum_{m=-n}^{m=n} p(m, n) = \sum_{a=0}^n \frac{n!}{a!(n-a)!} \frac{1}{2^n} = \sum_{a=0}^n C_a^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-a} \left(\frac{1}{2}\right)^a = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^n = 1.$$

- *Si  $B_1, B_2, \dots, B_k$  es una partición de  $B$  entonces la probabilidad de que ocurra  $B$  es la suma de las probabilidades individuales*

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_k).$$

$B$  es una unión del conjunto de eventos no vacíos  $B_1, B_2, \dots, B_k$  disjuntos dos a dos ( $B_i \cap B_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ ). Si tomamos  $k$  unidades de tiempo fijas entonces  $B$  será la unión de todos los posibles puntos que la partícula puede alcanzar desde  $-k\Delta x$  hasta  $k\Delta x$ .

Nos basta con demostrarlo para un conjunto  $B$  con tan solo dos elementos ( $k=2$ ). Supongamos que tenemos el conjunto  $B_1$  formado por el punto  $m\Delta x$  y  $B_2$  formado por  $\bar{m}\Delta x$ , la probabilidad  $P(B) = P(B_1 + B_2)$  es la probabilidad de estar en  $m\Delta x$  o estar en  $\bar{m}\Delta x$  que, al ser disjuntos, es la suma de probabilidades.

La generalización a cualquier conjunto de muchos eventos es evidente, si tengo  $B$  que contiene un número de elementos  $l$ :  $a_1\Delta x, a_2\Delta x, \dots, a_l\Delta x$  entonces:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{i=l} p(\{a_i\Delta x\}).$$

Con esto queda demostrado que  $p(m, n)$  es una función de probabilidad.

Si ahora tomamos  $n$  suficientemente grande tenemos:

$$n! \sim (2\pi n)^{\frac{1}{2}} n^n e^{-n}, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

que es la fórmula de Stirling, donde  $f(n) \sim g(n)$  cuando  $n \rightarrow \infty$  quiere decir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$ .

Ahora, si  $m \ll n$  (es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = 0$ ) se tiene que  $m \pm n$  también es grande y, por tanto, teniendo en cuenta la fórmula (2.1), podemos sustituir la aproximación (2.7) en (2.6):

$$\begin{aligned} p(m, n) &\sim \frac{1}{2^n} \frac{n!}{a!(n-a)!} \sim \frac{1}{2^n} \frac{(2\pi n)^{\frac{1}{2}} n^n e^{-n}}{\left(\frac{n+m}{2}\right)! \left(\frac{n-m}{2}\right)!} \sim \\ &\sim \frac{1}{2^n} \frac{(2\pi n)^{\frac{1}{2}} n^n e^{-n}}{\left[(2\pi \left(\frac{n+m}{2}\right))^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n+m}{2}\right)^{\frac{n+m}{2}} e^{-\left(\frac{n+m}{2}\right)}\right] \left[(2\pi \left(\frac{n-m}{2}\right))^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n-m}{2}\right)^{\frac{n-m}{2}} e^{-\left(\frac{n-m}{2}\right)}\right]} \sim \\ &\sim \frac{n^n \sqrt{2} \sqrt{n}}{2^n \sqrt{\pi}} \frac{e^{-n} e^{\left(\frac{n+m}{2}\right)} e^{\left(\frac{n-m}{2}\right)}}{(n+m)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n+m}{2}\right)^{\frac{n+m}{2}} (n-m)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n-m}{2}\right)^{\frac{n-m}{2}}} \sim \\ &\sim \frac{\sqrt{2} n^{n+\frac{1}{2}}}{2^n \sqrt{\pi}} \frac{2^{\left(\frac{n+m}{2}\right)} 2^{\left(\frac{n-m}{2}\right)}}{(n+m)^{\frac{1}{2}} (n+m)^{\frac{n+m}{2}} (n-m)^{\frac{1}{2}} (n-m)^{\frac{n-m}{2}}} \sim \\ &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} n^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{n-m}{n+m}\right)^{\frac{m}{2}} (n^2 - m^2)^{-\frac{n+1}{2}}. \end{aligned}$$

O equivalentemente,

$$\begin{aligned} p(m, n) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} n^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{n-m}{n+m}\right)^{\frac{m}{2}} (n^2 - m^2)^{-\frac{n+1}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} n^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{1-m/n}{1+m/n}\right)^{\frac{m}{2}} \left(n^2 \left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right)\right)^{-\frac{n+1}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} n^{n+\frac{1}{2}} n^{-n-1} \left(\frac{1-m/n}{1+m/n}\right)^{\frac{m}{2}} \left(1 - \left(\frac{m}{n}\right)^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}. \end{aligned}$$

Así,

$$p(m, n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left(\frac{1-m/n}{1+m/n}\right)^{\frac{m}{2}} \left(1 - \left(\frac{m}{n}\right)^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad n \gg m. \quad (2.8)$$

Como  $m/n$  es un número pequeño, podemos aproximar la sucesión (2.8) utilizando el desarrollo en serie de Taylor de ciertas funciones de variable real relacionadas, tal y como se explica a continuación.

En primer lugar, tenemos que:

$$\left(\frac{1-m/n}{1+m/n}\right)^{\frac{m}{2}}.$$

donde efectivamente  $m/n$  es un número muy pequeño ya que  $n$  es grande y  $m \ll n$ , es de la forma:

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{m}{2}}.$$

y tomando exponenciales:

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{m}{2}} = e^{\frac{m}{2} \log f(x)} \quad \text{donde } f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad (2.9)$$

Sea ahora  $g(x) = \log f(x)$ , utilizamos el Teorema de Taylor con resto de orden 2 en  $x=0$ , de manera que la función  $g(x)$  tiene desarrollo en serie de Taylor en el punto  $x=0$  de la forma:

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + R_1(x, 0) = -2x + \frac{g^{(2)}(\xi)}{2!}x^2,$$

donde  $\xi$  es un punto intermedio entre 0 y  $x$ .

Además tenemos que  $R_1(x, 0)$  está acotado para  $|x| \leq 1/2$ :

La función  $g(x)$  es de clase  $C^\infty$  en  $|x| < 1$ . Si tomo  $|x| \leq 1/2$  tengo un conjunto compacto, una bola cerrada de centro 0 y radio  $1/2$ . Así,  $R_1(x, 0)$  y, más concretamente,  $g^{(2)}(\xi)$  es una función continua en un compacto y, por el Teorema de Weierstrass, tiene un máximo:

$$|g^{(2)}(\xi)| \leq M, \quad \forall \xi \in \bar{B}(0, 1/2).$$

con  $M$  una constante real.

Por tanto, podemos escribir el desarrollo en serie de Taylor de la función  $g(x)$  en el punto  $x=0$  de la forma:

$$g(x) = \log(f(x)) = -2x + O(x^2), \quad (2.10)$$

donde  $O(x^2)$  cumple que  $Cx^2 \leq O(x^2) \leq Cx^2$ ,  $C$  es una constante real.

Cabe destacar el cálculo del radio de convergencia de la función  $g(x)$ . Para ello necesitamos, en primer lugar, escribir la función en forma de serie de potencias.

$$\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \log(1-x) - \log(1+x).$$

Escribamos cada uno de los anteriores logaritmos como series de potencias.

Sabemos que la serie geométrica:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \quad (2.11)$$

es una serie de potencias. Integrando a ambos lados de la igualdad

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1-x} dx &= \int \sum_{n=0}^{\infty} x^n dx \Rightarrow \\ \Rightarrow -\log(1-x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \end{aligned}$$

donde  $C$  es una constante cuyo valor podemos obtener sustituyendo por  $x=0$  en la ecuación anterior:

$$-\log(1) = C \rightarrow C = 0.$$

Así,

$$\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}. \quad (2.12)$$

Del mismo modo sacamos el desarrollo en serie de potencias de la función  $\log(1+x)$ . En primer lugar podemos escribir la serie geométrica (2.11) de la manera siguiente:

$$\frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Integrando a ambos lados de la igualdad,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+x} &= \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \Rightarrow \\ \Rightarrow \log(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\end{aligned}$$

donde la constante C toma, sustituyendo por  $x=0$ , el valor

$$\log(1) = C \rightarrow C = 0.$$

Por tanto,

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}. \quad (2.13)$$

Si juntamos el desarrollo en serie de potencias de  $\log(1-x)$  y  $\log(1+x)$  de las ecuaciones (2.12) y (2.13) tenemos:

$$\begin{aligned}g(x) &= \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \log(1-x) - \log(1+x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \\ &= -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right) = \\ &= \left(-2x - \frac{2x^3}{3} - \frac{2x^5}{5} - \dots\right) = -2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right) = \\ &= -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},\end{aligned} \quad (2.14)$$

donde la ecuación (2.14) es el desarrollo en serie de potencias de la función  $g(x)$ . Calculemos, ahora, su radio de convergencia mediante el criterio del cociente, donde  $a_n = -2/(2n+1)$ :

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2/(2n+2+1)}{-2/(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = 1.$$

Así, el radio de convergencia de la serie de potencias (2.14), que se corresponde con la función  $g(x)$ , es  $R = \frac{1}{L} = 1$ .

Una vez vista la convergencia de la función  $g(x)$  volvemos a la ecuación (2.9) y teniendo en cuenta el desarrollo en serie de Taylor de la función  $g(x)$  descrito en la ecuación (2.10) tenemos:

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{m}{2}} = e^{\frac{m}{2} \log f(x)} = e^{\frac{m}{2}(-2x + O(x^2))} = e^{-mx + mO(x^2)}.$$

En particular, tomando  $x = \frac{m}{n}$  con  $m$  pequeño y  $n$  grande, de manera que la fracción  $m/n$  sea un número pequeño:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-m/n}{1+m/n}\right)^{\frac{m}{2}} &= e^{-m \frac{m}{n} + mO\left(\frac{m^2}{n^2}\right)} = e^{-\frac{m^2}{n} + m \frac{m}{n} O\left(\frac{m^2}{n^2}\right)} = \\ &= e^{-\frac{m^2}{n} \left(1 + \frac{n}{m} O\left(\frac{m^2}{n^2}\right)\right)} = e^{-\frac{m^2}{n} (1 + O(\frac{m}{n}))}.\end{aligned} \quad (2.15)$$

Particularmente, deberíamos tomar  $x = \frac{m}{n} < \frac{1}{2}$  de manera que se sigan cumpliendo las condiciones del teorema de Weirstrass para esta  $x$ .

Por otra parte, si volvemos a la ecuación (2.8) con  $m \ll n$  también podemos aproximar la función:

$$\left(1 - \left(\frac{m}{n}\right)^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$



mediante logaritmos y exponenciales (al ser  $m/n$  un numero pequeño). Esta función es del tipo:

$$(1 - x^2)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Si tomamos exponenciales tenemos:

$$(1 - x^2)^{-\frac{n+1}{2}} = e^{-\frac{n+1}{2} \log(1-x^2)}. \quad (2.16)$$

Sea  $h(x) = \log(1 - x^2)$ , utilizamos el Teorema de Taylor con resto de orden 4 en el punto  $x = 0$ :

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2!}x^2 + \frac{h^{(3)}(0)}{3!}x^3 + R_3(x, 0) = -x^2 + \frac{h^{(4)}(\xi)}{4!}x^4,$$

donde  $\xi$  es un punto intermedio entre 0 y  $x$ .

Además tenemos que  $R_3(x, 0)$  esta acotado para  $|x| \leq 1/2$ :

La función  $g(x)$  es de clase  $C^\infty$  en  $|x| < 1$ . Si tomo  $|x| \leq 1/2$  tengo un conjunto compacto, una bola cerrada de centro 0 y radio  $1/2$ . Así,  $R_3(x, 0)$  y, más concretamente,  $h^{(4)}(\xi)$  es una función continua en un compacto y, por el Teorema de Weierstrass, tiene un máximo:

$$|h^{(4)}(\xi)| \leq M, \quad \forall \xi \in \bar{B}(0, 1/2).$$

con  $M$  una constante real.

Por tanto, podemos escribir el desarrollo en serie de Taylor de la función  $h(x)$  en el punto  $x = 0$  de la forma:

$$h(x) = \log(1 - x^2) = -x^2 + O(x^4). \quad (2.17)$$

De manera análoga a la función previamente estudiada  $g(x)$ , cabe destacar el radio de convergencia de esta función  $h(x)$ . Para ello, escribamos esta función como una serie de potencias. Recordemos los desarrollos en series de potencias de  $\log(1 - x)$  y  $\log(1 + x)$  en las ecuaciones (2.12) y (2.13) respectivamente y que, además, por las propiedades de los logaritmos:

$$\log(1 - x^2) = \log((1 + x)(1 - x)) = \log(1 - x) + \log(1 + x).$$

Así, se tiene que la función  $h(x)$  se puede escribir como una serie de potencias de la forma:

$$\begin{aligned} h(x) &= \log(1 - x^2) = \log(1 - x) + \log(1 + x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots\right) + \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right) \\ &= -2\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^6}{6} - \dots = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+1}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Finalmente, calculamos el radio de convergencia de la serie (2.18) mediante el criterio del Cociente donde  $a_n = -1/(2n+1)$ :

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1/(2n+2+1)}{-1/(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = 1.$$

Por tanto, el radio de convergencia de la serie de potencias asociada a la función  $h(x)$  es  $R = \frac{1}{L} = 1$ .

Volviendo a la ecuación (2.16), teniendo en cuenta el desarrollo en serie de Taylor de la función  $h(x)$  de la ecuación (2.17), tenemos:

$$(1 - x^2)^{-\frac{n+1}{2}} = e^{-\frac{n+1}{2} \log(1-x^2)} = e^{-\frac{n+1}{2}(-x^2 + O(x^4))}.$$

Particularmente, tomando  $x=m/n$  un número pequeño de manera que se sigan satisfaciendo las condiciones del Teorema de Weierstrass:

$$\begin{aligned} \left(1 - \left(\frac{m}{n}\right)^2\right)^{-\frac{n+1}{2}} &= e^{-\frac{n+1}{2} \left(-\frac{m^2}{n^2} + O\left(\frac{m^4}{n^4}\right)\right)} = e^{\frac{m^2(n+1)}{2n^2} \left(1 + \frac{n^2}{m^2} O\left(\frac{m^4}{n^4}\right)\right)} = \\ &= e^{\left(\frac{m^2(n)}{2n^2} + \frac{m^2}{2n^2}\right) \left(1 + \frac{n^2}{m^2} O\left(\frac{m^4}{n^4}\right)\right)} = e^{\left(\frac{m^2}{2n} + \frac{m^2}{2n^2}\right) \left(1 + \frac{n^2}{m^2} O\left(\frac{m^4}{n^4}\right)\right)} = \\ &= e^{\frac{m^2}{2n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{n^2}{m^2} O\left(\frac{m^4}{n^4}\right)\right)} = e^{\frac{m^2}{2n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{n^2}{m^2} O\left(\frac{m^4}{n^4}\right)\right)} = \\ &= e^{\frac{m^2}{2n} \left(1 + \frac{n^2}{m^2} O\left(\frac{m^4}{n^4}\right) + \frac{1}{n} + \frac{n}{m^2} O\left(\frac{m^4}{n^4}\right)\right)} = e^{\frac{m^2}{2n} \left(1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{m^2}{n^2}\right)\right)}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Finalmente, podemos aproximar la ecuación (2.8) con (2.15) y (2.19) de la forma

$$p(m, n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{m^2}{n}} e^{\frac{m^2}{2n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)}.$$

Así, el comportamiento asintótico de la expresión (2.8), cuando  $n \rightarrow \infty$ , es:

$$p(m, n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-m^2/(2n)}, \quad m \ll n, \quad (2.20)$$

que es la Distribución Normal o Distribución Gaussiana, cuya gráfica de forma acampanada se conoce como Campana de Gauss.

### 2.3.2. Paso a continuo, la ecuación de difusión

El objetivo principal de esta sección consiste en poder calcular la probabilidad anteriormente estudiada para cualquier punto  $x$  general (es decir,  $x \in \mathbb{R}$ ) en vez de restringirnos a un punto  $x$  en la malla. En otras palabras, queremos que el dominio de la función de probabilidad  $p(m, n)$  pase de ser discreto a continuo. Basamos este estudio en el libro de Murray [21, pag:397].

En la sección previa se ha considerado el tamaño del paso una cantidad constante, de modo que la partícula está confinada en una malla (retícula de nodos) igualmente espaciados, siendo el espaciamento  $\Delta x$ . De igual modo, se consideró que entre cada salto que realiza la partícula hay un intervalo de tiempo igual a  $\Delta t$ , por lo que el tiempo se consideró como múltiplo de una unidad discreta de tiempo.

Ahora, ¿Qué pasaría si quisiéramos calcular la probabilidad de que una partícula alcance el punto  $\bar{x}$  situado a su derecha, donde  $\bar{x} \in \mathbb{R}$ ? Este punto  $\bar{x}$  se encuentra fuera de la malla estudiada, tal y como se puede apreciar en la figura 2.3.

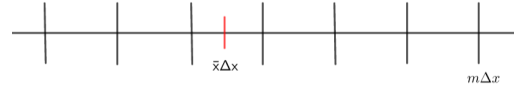


Figura 2.3: Representación del punto  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  que se encuentra fuera de la malla.

Nuestro objetivo es aproximarnos a este punto, o a cualquier otro que se encuentre fuera de la malla, mediante una sucesión de números. Así, para poder pasar a un límite continuo, reemplazamos las variables discretas  $(n, t)$  por las variables:

$$x = m\Delta x, \quad t = n\Delta t,$$

donde  $x$  y  $t$  son variables de espacio y tiempo continuas.

Si tomamos un paso  $\Delta x$  cada vez más pequeño, podemos definir una mayor cantidad de puntos y calcular su probabilidad. Sin embargo, si  $m$  (el número de pasos de espacio a la derecha) fuera también pequeño, no podríamos calcular la probabilidad que buscamos a una distancia lejana al origen. Por tanto, debemos tomar un paso pequeño y  $m$  grande. Este mismo razonamiento puede ser desarrollado para el tiempo ( $\Delta t$  y  $n$ ).

Si sustituimos en la función (2.20) con  $m = x/\Delta x$  y  $n = t/\Delta t$  tenemos:

$$p\left(\frac{x}{\Delta x}, \frac{t}{\Delta t}\right) \sim \left\{\frac{2\Delta t}{\pi t}\right\}^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right\}. \quad (2.21)$$

Hacemos tender, en (2.21),  $m \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$  haciendo el paso de espacio y tiempo más pequeño y los números  $m$  y  $n$  más grande de manera que las variables  $x$  y  $t$  sean finitas. Sin embargo si  $\Delta x \rightarrow 0$  ó  $\Delta t \rightarrow 0$  la probabilidad descrita en la ecuación (2.21):  $p\left(\frac{x}{\Delta x}, \frac{t}{\Delta t}\right) \rightarrow 0$ .

Particularmente, si tomamos a la vez  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $\Delta t \rightarrow 0$  en la ecuación (2.21) :

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} p\left(\frac{x}{\Delta x}, \frac{t}{\Delta t}\right),$$

nos encontramos en el caso 0/0, es decir, puede ser que dicho límite no exista. De hecho, vamos a probar a continuación que efectivamente no existe:

Tomamos las sucesiones  $(\Delta x)_k = (\frac{1}{k})$  y  $(\Delta t)_k = (\frac{1}{k})$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), de manera que  $(\Delta x)_k, (\Delta t)_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$  y calculamos el límite de la función (2.21) con dichas sucesiones, teniendo en cuenta que  $x$  y  $t$  son fijos.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} p\left(\frac{x}{(\Delta x)_k}, \frac{t}{(\Delta t)_k}\right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi t k}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t} \frac{1}{(\frac{1}{k})^2}\right\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi t k}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t} k\right\} = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, si tomamos las sucesiones  $(\Delta x)_k = (\frac{1}{k})$  y  $(\Delta t)_k = (-\frac{1}{k})$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), de manera que  $(\Delta x)_k, (\Delta t)_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$  y calculamos de nuevo el límite de la función (2.21) con dichas sucesiones:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} p\left(\frac{x}{(\Delta x)_k}, \frac{t}{(\Delta t)_k}\right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{\pi t k}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{x^2}{2t} \frac{1}{(\frac{1}{k})^2}\right\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{\pi t k}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{x^2}{2t} k\right\} = \infty. \end{aligned}$$

Así, hemos encontrado dos sucesiones diferentes que convergen ambas a cero y cuyos límites en la función (2.21) son distintos, por lo que podemos concluir, tal y como queríamos demostrar, que el límite de la función (2.21) en el origen no existe.

La variable de nuestro interés, es decir, para la cual podríamos calcular el límite que acabamos de estudiar es :

$$u(x, t) = \frac{p\left(\frac{x}{\Delta x}, \frac{t}{\Delta t}\right)}{2\Delta x},$$

donde  $p=2u\Delta x$  es la probabilidad de encontrar una partícula en el intervalo  $(x, x+\Delta x)$  en un tiempo  $t$ . Así,

$$\frac{p\left(\frac{x}{\Delta x}, \frac{t}{\Delta t}\right)}{2\Delta x} \sim \left\{\frac{\Delta t}{2\pi t(\Delta x)^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right\}. \quad (2.22)$$

Además, asumimos que

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} = D \neq 0.$$

es decir, al contrario que en la sección anterior donde la partícula se movía un paso de espacio en una unidad de tiempo, estamos asumiendo que el paso en espacio  $\Delta x$  es más pequeño que el paso en tiempo. De hecho, se cumple que el paso en tiempo es proporcional al paso en espacio.

Por lo tanto, sustituyendo esta suposición en la ecuación (2.22)

$$u(x, t) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{p\left(\frac{x}{\Delta x}, \frac{t}{\Delta t}\right)}{2\Delta x} = \left(\frac{1}{4\pi Dt}\right)^{1/2} e^{-x^2/(4Dt)}, \quad (2.23)$$

donde  $D$  es el coeficiente de difusión de las partículas. Notemos que  $u(x, t)$  tiene dimensiones  $(longitud)^2/tiempo$ . Mide la eficiencia con la que las partículas se dispersan desde una densidad alta a una baja. Cuanto mayor sea el coeficiente de difusión, más rápido será el proceso de difusión. Por tanto, el coeficiente de difusión en los sólidos tiende a ser mucho menor que los coeficientes de difusión para líquidos y gases.

## 2.4. La ley de Fick

Otro enfoque para el estudio de la ecuación de difusión es la clásica Ley de Fick.

En el año 1885, el fisiólogo Adolf Fick informó, por primera vez, sobre sus leyes sobre el transporte de masa a través de medios difusos. El trabajo de Fick se refiere principalmente a la difusión en fluidos ya que, en el momento en el que realizó sus experimentos, la difusión en sólidos no se consideraba posible de manera general.

Esta ley postula que el flujo  $J$  de una materia, que pueden ser células, cantidad de un químico, número de animales... va desde una región de alta concentración hacia un área de baja concentración y que, además, es proporcional al gradiente de concentración del material:

$$J = -D \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.24)$$

donde  $u(x,t)$  es la concentración o densidad (masa por unidad de longitud) de la materia en la posición  $x$  en el tiempo  $t$  y  $D$  es el coeficiente de difusión de la materia. El signo negativo indica que la difusión transfiere materia desde una zona de alta concentración hacia una región de baja concentración. Ver [21, pág:398].

Consideremos, basándonos en el libro de Strauss [25, pág:14-16], un líquido inmóvil que llena un tubo o tubería recta y una sustancia química, por ejemplo un tinte, que se difunde través de dicho líquido. El tinte se moverá de una región de alta concentración hacia un área de baja concentración. Sea  $u(x,t)$  la concentración del tinte en la posición  $x$  en el tiempo  $t$ . La masa de tinte en la sección del tubo que va desde  $x_0$  hasta  $x_1$  será:

$$M(t) = \int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx.$$

Si derivamos con respecto de  $t$  a ambos lados de la igualdad,

$$\frac{dM(t)}{dt} = \int_{x_0}^{x_1} u_t(x, t) dx.$$

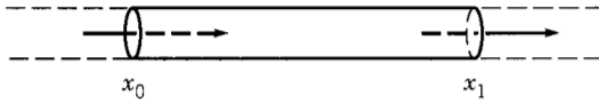


Figura 2.4: Representación del tubo en  $[x_0, x_1]$  donde las flechas indican la dirección del flujo. Ref [25].

Al derivar estoy describiendo la variación de flujo desde el punto  $x_0$  hasta el punto  $x_1$  donde el flujo mide la cantidad de partículas que han pasado por un punto determinado en una cantidad de tiempo.

Dicha variación en el intervalo  $[x_0, x_1]$  será la diferencia entre el flujo en  $x_1$  menos el flujo en  $x_0$ . Así, teniendo en cuenta la ley de Fick descrita en la ecuación (2.24) tenemos:

$$\frac{dM}{dt} = \text{Flujo que entra} - \text{Flujo que sale} = -Du_x(x_0, t) - (-Du_x(x_1, t)) = Du_x(x_1, t) - Du_x(x_0, t),$$

donde  $D$  es el coeficiente de difusión del tinte, una constante mayor que cero. Por tanto,

$$\int_{x_0}^{x_1} u_t(x, t) dx = Du(x_1, t) - Du(x_0, t). \quad (2.25)$$

Ahora tomando  $x_0$  fijo y  $x_1$  variable derivamos la expresión anterior respecto de  $x_1$ .

En primer lugar, supongamos que la primitiva para  $u_t(x, t)$  con respecto a  $x$  (ya que  $t$  es fijo) es  $F$ , por el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos:

$$F(x_1) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} u_t(x, t) dx.$$

derivando la expresión anterior con respecto a  $x_1$  tenemos:

$$F'(x_1) = u_t(x_1, t).$$

Así, derivando en la ecuación (2.25) con respecto a  $x_1$  tenemos:

$$u_t(x_1, t) = Du_{xx}(x_1, t),$$

o equivalentemente,

$$u_t = Du_{xx}, \quad (2.26)$$

que se conoce como la ecuación de difusión.

Si ahora soltamos una cantidad  $Q$  de partículas por unidad de espacio en  $x=0$  y tiempo  $t=0$ , esto es,

$$u(x, 0) = Q\delta(x),$$

donde  $\delta(x)$  es la función Delta de Dirac, entonces la solución de la ecuación (2.26) es:

$$u(x, t) = \frac{Q}{2(\pi Dt)^{1/2}} e^{-x^2/(4Dt)}, \quad t > 0. \quad (2.27)$$

que para  $Q=1$  coincide con la ecuación (2.23) que obtuvimos desde el enfoque de la caminata aleatoria (ver [21, pág:398]).

La solución de la ecuación de difusión (2.26) la estudiaremos con profundidad en el siguiente capítulo de este trabajo y explicaremos con más detalle lo que acabamos de exponer.

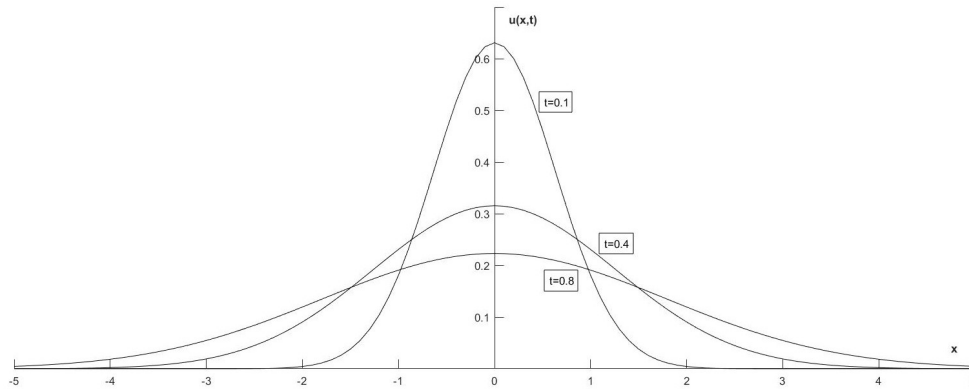


Figura 2.5: Representación gráfica de la concentración  $u(x,t)$  de  $Q=1$  partículas liberadas en  $x=0$  en los momentos  $t=0.1$ ,  $t=0.4$  y  $t=0.8$ , que se difunden según la ecuación (2.1) suponiendo el coeficiente de difusión  $D=2$ .



---

# CAPÍTULO 3

---

## ECUACIÓN DEL CALOR

La ecuación que describe la conducción del calor en sólidos es de gran importancia en la física y matemáticas actuales. Además de estar en el centro del análisis de problemas relacionados con la transferencia de calor en sistemas físicos, la estructura matemática de la Ecuación del Calor se utiliza para describir otros procesos físicos en términos de difusión. Por tanto, actualmente y, debido a su variedad de soluciones, se ha convertido en una expresión fundamental en otras disciplinas y campos de la ciencia. En la teoría de probabilidad, la ecuación del calor está relacionada con el movimiento Browniano y las caminatas aleatorias, tal y como vimos en el capítulo anterior de este trabajo. También tiene su importancia en otros ámbitos como las matemáticas financieras, mecánica cuántica, geometría...

En este capítulo estudiaremos la llamada solución fundamental del calor  $n$ -dimensional y hallaremos soluciones para distintos problemas, con condiciones iniciales y de contorno diferentes, basadas en la solución fundamental.

### 3.1. La Ecuación del Calor

#### 3.1.1. Historia de la Ecuación del Calor

La Ecuación del Calor, descrita como una ecuación en derivadas parciales, fue formulada por primera vez por Joseph Fourier en 1822 para describir la transferencia de calor. (ver [23]).

Dado que el calor puede observarse y medirse fácilmente solo en términos de temperatura, el desarrollo de un termómetro confiable capaz de dar mediciones verificables fue fundamental para el desarrollo de la ciencia del calor. Daniel Fahrenheit (1686-1736) fue el primero en cuantificar el concepto de temperatura por sus trabajos con termómetros cerrados de líquidos. Estableció lo que llamamos la escala Fahrenheit con la temperatura de derretimiento del hielo a  $32^\circ$  y de ebullición del agua a  $212^\circ$ .

Joseph Black (1728-1799) descubrió que, cuando el hielo se derrite, se calienta sin cambiar de temperatura. Esto le llevo a proponer el término de “calor latente” para referirse al calor absorbido por el agua cuando cambia de estado de sólido a líquido. También notó que masas iguales de diferentes sustancias necesitaban diferentes cantidades de calor para elevar sus temperaturas en la misma cantidad, a lo que llamó “calor específico”.

Antoine Laurent Lavoisier y Pierre Simon Laplace midieron, por primera vez, el calor latente del derretimiento del hielo y el calor específico de determinados materiales. Además, demostraron de manera cuantitativa que el proceso de la respiración, en el cual el oxígeno es combinado con el carbono del cuerpo del animal, es de hecho un proceso de combustión que resulta en la liberación de calor. Su contribución a la ecuación de Fourier fue la noción de calor específico, el cual es fundamental para comprender los cambios de temperatura dependientes del tiempo.

Considerando ahora el proceso de transferencia de calor en sólidos, es decir, el proceso de conducción de calor, cabe mencionar a Baptiste Biot (1774-1862) que, apoyado por la ley de enfriamiento de Newton, percibió que, en una varilla calentada, la temperatura en un punto está influenciada por todos los puntos cercanos.

Cuando Fourier empezó a trabajar en la conducción del calor, la ciencia del calor y de las ecuaciones en derivadas

parciales estaban comenzando a ser desarrolladas. Las opiniones sobre la naturaleza del calor estaban divididas entre aquellos, como Biot, que creían que el calor era un fluido penetrante y los que creían que el calor era simplemente movimiento, que consistía en vibraciones moleculares rápidas. Fourier adoptó un enfoque empírico para observar como la materia se comporta macroscópicamente y así evitó la discusión sobre la naturaleza del calor.

Fourier, apoyándose sobretodo en el trabajo previo de Biot, visualizó el problema en términos de tres componentes: transporte de calor en el espacio, almacenamiento del calor dentro de un elemento pequeño del sólido y condiciones de contorno. Fue el primero en construir una teoría matemática del calor con su ecuación de conducción y el método de series de Fourier para resolverla.

### 3.1.2. Interpretación de la Ecuación del Calor

La Ecuación del Calor es una ecuación diferencial en derivadas parciales. Es un caso especial de la ecuación de difusión que describe cómo la distribución del calor evoluciona a través del tiempo:

$$u_t = k u_{xx},$$

Tomando como  $u(x,t)$  la temperatura del material en un punto  $x$  en un tiempo determinado  $t$ , la Ecuación del Calor dice que el índice ( $u_t$ ) en el que un material se calienta en un punto es proporcional a cuanto difiere ( $u_{xx}$ ) el valor promedio de calor del material alrededor de dicho punto. El coeficiente  $k$  tiene que ver con la conductividad térmica, el calor específico y la densidad del material, aunque es habitual en estudios matemáticos tomar  $k=1$ .

Dicha ecuación está sometida a unas condiciones iniciales y de contorno determinadas. Supongamos que estamos estudiando la Ecuación del Calor unidimensional, es decir, tomamos una varilla delgada de una longitud dada, digamos longitud  $L$  ( $0 \leq x \leq L$ ). Así, la condición inicial nos indica la distribución inicial de temperatura en la varilla ( $u(x,0), t=0$ ) y las condiciones de contorno indican la temperatura en los extremos de la varilla para cualquier tiempo  $t$  ( $u(0,t), u(L,t)$  con  $t \in (0,T)$ )

La interpretación física que explica esta ecuación y, en general, la ecuación de difusión puede verse en el primer capítulo de este trabajo en la sección 2.4 y se relaciona directamente con la Ley de Fick.

### 3.1.3. Presentación del problema a estudiar

Procedemos a estudiar soluciones de la Ecuación del Calor, (Ver Evans [9, pág.44]):

$$u_t = \Delta u. \quad (3.1)$$

y la Ecuación del Calor no homogénea,

$$u_t - \Delta u = f, \quad (3.2)$$

sujetas a unas condiciones iniciales y de contorno apropiadas.

Tomamos  $t > 0$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ , aunque también podría considerarse  $x \in U$  donde  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto. Supondremos, además, que la función incógnita  $u$  que buscamos está definida  $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u = u(x,t)$ .

Así, la temperatura buscada  $u(x,t)$  es, bajo estas condiciones, una función de  $n+1$  variables:  $n$  variables para el espacio y una para el tiempo.

El operador Laplaciano  $\Delta$  se calcula con respecto de las variables  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Por otro lado, en la ecuación no homogénea (3.2) la función  $f : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  viene dada. El estudio que realizaremos de la solución fundamental y de las diferentes soluciones para cada Problema de Cauchy está basado en el libro de Evans [9, Sección:2.3].



## 3.2. Solución fundamental

### 3.2.1. Cálculo de la solución fundamental

Una buena estrategia para encontrar soluciones a cualquier ecuación diferencial en derivadas parciales es identificar unas soluciones específicas y llegar a soluciones más complicadas a partir de las específicas ya calculadas. Por tanto, es evidente el interés de calcular una solución particular de la Ecuación del Calor (3.1) que nos ayude a buscar soluciones más complejas para distintas condiciones iniciales y de contorno.

Se observa, claramente, que la Ecuación del Calor implica una derivada con respecto de la variable  $t$  y dos derivadas con respecto de las variables  $x_i$  ( $i=1\dots n$ ). Por tanto, este hecho nos sugiere que si  $u(x,t)$  es solución de la ecuación (3.1) también debería serlo  $u(\lambda x, \lambda^2 t)$  para  $\lambda \in \mathbb{R}$ , es decir, que la función  $u(x,t)$  es invariante respecto dilataciones.

En efecto, si tomamos la función  $v(x, t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$  tenemos:

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &= \lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t), \\ v_{xx}(x, t) &= (\lambda)(\lambda) u_{xx}(\lambda x, \lambda^2 t). \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (3.1):

$$v_t(x, t) = v_{xx}(x, t) \Rightarrow \lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t) = \lambda^2 u_{xx}(\lambda x, \lambda^2 t) \Rightarrow u_t(\lambda x, \lambda^2 t) = u_{xx}(\lambda x, \lambda^2 t).$$

Así, la función  $v(x, t)$  cumple la ecuación (3.1) y, por lo tanto, también la función  $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ . Este hecho motiva a buscar una solución de la Ecuación del Calor de la forma:

$$u(x, t) = v\left(\frac{r^2}{t}\right) = v\left(\frac{|x|^2}{t}\right),$$

de manera que la solución  $u(x,t)$  sea invariante mediante re-escalamiento. Es decir, tomando  $u(\lambda x, \lambda^2 t)$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$  fijo y, teniendo en cuenta la suposición anterior, tenemos:

$$u(\lambda x, \lambda^2 t) = v\left(\frac{(\lambda x)^2}{\lambda^2 t}\right) = v\left(\frac{|x|^2}{t}\right) = u(x, t).$$

Aunque este razonamiento nos lleva a la solución de la Ecuación del Calor que buscamos, es más rápido buscar soluciones que sean invariantes respecto dilataciones en la forma  $u(x, t) \rightarrow \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$ ,  $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  donde, tomando  $\lambda = \frac{1}{t}$ , con  $t > 0$ , y teniendo en cuenta el re-escalamiento anterior, podemos buscar una solución que tenga la estructura particular siguiente:

$$u(x, t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0), \quad (3.3)$$

donde las constantes  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y la función  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se deben determinar.

Introduzcamos ahora esta solución (3.3) en nuestra EDP (3.1):

$$\begin{cases} u_t(x, t) = -\alpha t^{-\alpha-1} v(x/t^\beta) + (-\beta) t^{-\alpha} x t^{-\beta-1} Dv(x/t^\beta) \\ \quad = -\alpha t^{-(\alpha+1)} v(x/t^\beta) + (-\beta) t^{-(\alpha+1)} x t^{-\beta} Dv(x/t^\beta). \\ \Delta u(x, t) = t^{-\alpha} t^{-2\beta} \Delta v(x/t^\beta). \end{cases}$$

donde  $Dv$  y  $\Delta v$  son el gradiente y laplaciano de la función  $v$ , respectivamente. Así, llamando  $y = x/t^\beta$  tenemos:

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} y Dv(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \quad (3.4)$$

Tomando  $\beta = 1/2$  podemos eliminar la variable referente al tiempo ( $t$ ) de la ecuación anterior y concluir que la función  $u(x,t)$  de la ecuación (3.3) es solución de la Ecuación del Calor si la función  $v$  satisface:

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \frac{1}{2} t^{-(\alpha+1)} y Dv(y) + t^{-(\alpha+1)} \Delta v(y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha v(y) + \frac{1}{2}yDv(y) + \Delta v(y) = 0. \quad (3.5)$$

Es decir, hemos transformado la EDP (3.1) de  $n+1$  variables en una EDP en la que interviene una variable menos (hemos eliminado la  $t$ ).

Tratemos de simplificar más la ecuación (3.5) suponiendo que  $v$  es una función radial. Desde el punto de vista físico, la función radial nos indica que la difusión (o en este caso, emisión del calor) se hace de manera uniforme en todas las direcciones. Por otro lado, desde el punto de vista matemático, esta suposición va a transformar la EDP (3.5) en una EDO, la cual es siempre más fácil de resolver.

Por tanto, al tomar  $v$  una función radial estamos buscando soluciones de la forma:

$$v(y) = w(|y|) \text{ para una función } w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Recordemos que  $y$  es una variable en  $\mathbb{R}^n$  y, por tanto,  $|y|$  se define como la norma euclídea, es decir,

$$|y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$$

Así, con motivo de sustituir en la ecuación (3.5), calculemos el gradiente y el laplaciano de la función  $v(y) = w(|y|)$ .

En primer lugar,  $D(w(|y|))$  es el vector de derivadas parciales:

$$D(w(|y|)) = \left( \frac{\partial}{\partial y_1} w(|y|), \frac{\partial}{\partial y_2} w(|y|), \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} w(|y|) \right),$$

donde, por ejemplo, se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial y_1} w(|y|) = w'(|y|) \frac{\partial}{\partial y_1} (|y|) = w'(|y|) \frac{1}{2} (y_1^2 + \dots + y_n^2)^{-1/2} (2y_1) = w'(|y|) \frac{y_1}{|y|}.$$

Así,

$$\begin{aligned} D(w(|y|)) &= \left( w'(|y|) \frac{y_1}{|y|}, w'(|y|) \frac{y_2}{|y|}, \dots, w'(|y|) \frac{y_n}{|y|} \right) = \\ &= \frac{w'(|y|)}{|y|} (y_1, \dots, y_n) = w'(|y|) \frac{y}{|y|}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Por otro lado, calculamos el laplaciano:

$$\begin{aligned} \Delta(w(|y|)) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left( w'(|y|) \frac{y_i}{|y|} \right) = \sum_{i=1}^n \left( w''(|y|) \frac{y_i^2}{|y|^2} + w'(|y|) \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{y_i}{|y|} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( w''(|y|) \frac{y_i^2}{|y|^2} \right) + w'(|y|) \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{y_i}{|y|} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( w''(|y|) \frac{y_i^2}{|y|^2} \right) + w'(|y|) \sum_{i=1}^n \frac{|y| - y_i \frac{y_i}{|y|}}{|y|^2} \\ &= \frac{w''(|y|)}{|y|^2} \sum_{i=1}^n (y_i^2) + w'(|y|) \sum_{i=1}^n \frac{|y|^2 - y_i^2}{|y|^3} \\ &= \frac{w''(|y|)}{|y|^2} |y|^2 + w'(|y|) \left[ \sum_{i=1}^n \frac{1}{|y|} - \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{|y|^3} \right] \\ &= w''(|y|) + w'(|y|) \left[ \frac{n}{|y|} - \frac{1}{|y|^3} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right] \\ &= w''(|y|) + w'(|y|) \left( \frac{n}{|y|} - \frac{1}{|y|} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Finalmente, sustituyendo el gradiente (3.7) y el laplaciano (3.8) en la ecuación (3.5) tenemos:

$$\alpha w(|y|) + \frac{1}{2} w'(|y|) \frac{|y|^2}{|y|} + w''(|y|) + w'(|y|) \left( \frac{n-1}{|y|} \right) = 0. \quad (3.9)$$

Si llamamos  $r=|y|$ ,  $'=\frac{d}{dr}$  la ecuación anterior se transforma en:

$$\alpha w(r) + \frac{1}{2} r w'(r) + w''(r) + \left( \frac{n-1}{r} \right) w'(r) = 0. \quad (3.10)$$

Recordemos que teníamos la Ecuación del Calor (3.1), una ecuación en derivadas parciales de varias variables que transformamos en una ecuación en derivadas parciales con una variable menos (3.5) y que acabamos de transformar en una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden (3.10), tal y como anticipábamos al suponer que la función “ $y$ ” de la ecuación (3.5) fuera radial.

Tan solo nos queda resolver esta EDO. Multiplicando la ecuación (3.10) por  $r^{n-1}$  obtenemos:

$$\alpha r^{n-1} w(r) + \frac{1}{2} r^n w'(r) + r^{n-1} w''(r) + ((n-1)r^{n-2}) w'(r) = 0.$$

Si ahora tomamos  $\alpha = n/2$ :

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} r^{n-1} w(r) + \frac{1}{2} r^n w'(r) + r^{n-1} w''(r) + ((n-1)r^{n-2}) w'(r) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} (n r^{n-1} w(r) + r^n w'(r)) + r^{n-1} w''(r) + ((n-1)r^{n-2}) w'(r) &= 0. \end{aligned}$$

Se observa fácilmente que se trata de la regla de la cadena, es decir, podemos escribir esta ecuación en la forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (r^n w(r))' + (r^{n-1} w'(r))' &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left( \frac{1}{2} r^n w(r) + r^{n-1} w'(r) \right)' &= 0. \end{aligned}$$

Calculemos una solución de esta EDO. Por la ecuación anterior tenemos:

$$\frac{1}{2} r^n w(r) + r^{n-1} w'(r) = C,$$

donde  $C$  es una constante ( $C \in \mathbb{R}$ ).

Como la finalidad de este apartado es encontrar una de las soluciones de la Ecuación del Calor, podemos tomar  $C=0$ . Así:

$$\frac{1}{2} r^n w(r) + r^{n-1} w'(r) = 0. \quad (3.11)$$

De esta manera, hemos transformado la ecuación (3.10), una EDO lineal de segundo orden, en una EDO lineal de primer orden fácilmente resoluble (3.11). Cabe mencionar que la elección particular de la constante  $\alpha = n/2$ , nos ha permitido obtener esta ecuación tan sencilla.

Por tanto, resolvamos esta última ecuación (3.11):

$$\begin{aligned} r^{n-1} w'(r) &= -\frac{1}{2} r^n w(r) \Rightarrow w'(r) = -\frac{1}{2} r w(r) \Rightarrow \frac{w'(r)}{w(r)} = -\frac{1}{2} r \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\ln(w(r)))' = -\frac{1}{2} r. \end{aligned}$$

Integrando a ambos lados de la igualdad tenemos:

$$\int (\ln(w(r)))' dr = - \int \frac{1}{2} r dr \Rightarrow \ln(w(r)) = -\frac{r^2}{4} + A,$$

con  $A \in \mathbb{R}$  constante. Ahora, tomando exponenciales:

$$e^{\ln(w(r))} = e^{-(r^2/4)+A} \Rightarrow w = e^{-r^2/4} e^A.$$

Como  $A$  es constante podemos definir otra constante  $B = e^A$ ,  $B \in \mathbb{R}$ . Por tanto, la solución a la ecuación (3.11) es:

$$w = Be^{-r^2/4} \quad (3.12)$$

con  $B \in \mathbb{R}$  una constante genérica. Por último, sustituyendo la solución (3.12) en (3.6):

$$v(y) = w(|y|) = w(r) = Be^{-|y|^2/4}.$$

Análogamente, sustituyendo en la ecuación (3.3) con los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  que hemos ido tomando a lo largo de los cálculos anteriores tenemos:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{t^{n/2}} v\left(\frac{x}{t^{1/2}}\right) = \frac{1}{t^{n/2}} Be^{-|x/\sqrt{t}|^2/4} \\ &= \frac{B}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad B \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde  $u(x, t)$  son algunas de las soluciones de la Ecuación del Calor.

**Definición 3.1.** La función

$$\Phi(x, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & (x \in \mathbb{R}^n, t > 0). \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n, t < 0). \end{cases}$$

se denomina *solución fundamental de la Ecuación del Calor*. [9, pág.46]

Veamos algunas propiedades de esta solución:

- $\Phi(x, t) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ .

La demostración de esta propiedad es trivial, ya que la imagen o recorrido de la función exponencial es  $\mathbb{R}^+$  y la función  $\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} > 0$  para todo  $t > 0$ .

- Para todo  $x \neq 0$  se tiene que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi(x, t) = 0$ .

Teniendo en cuenta que la función exponencial decrece más rápido que la función potencia, se observa claramente que:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = 0.$$

- La función  $\Phi(x, t)$  posee una singularidad en el punto  $(0, 0)$ , en dicho punto la función presenta un comportamiento asintótico que tiende a infinito, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi(x, t) = \infty \text{ cuando } x = 0.$$

Veámoslo,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi(0, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|0|^2}{4t}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} = \infty.$$

- $\Phi(x, t)$  es  $C^\infty$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ .

La comprobación de esta propiedad es obvia teniendo en cuenta que  $\Phi(x, t)$  es la composición de dos funciones  $C^\infty$ , la función exponencial y la función  $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ , para todo  $t$  fijo con  $t > 0$ .

Por último, cabe mencionar otra propiedad importante de la solución fundamental definida en (3.1), ya que la elección de la constante  $B = (4\pi)^{-n/2}$  en la ecuación (3.13) que nos lleva a esta solución fundamental es debida al siguiente lema (Ver Evans [9, pág.46]):

**Lema 3.2** (Masa de la solución fundamental). Para todo tiempo  $t > 0$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1.$$

*Demostración:* Calculamos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx.$$

Haciendo el cambio de variable

$$z = \frac{x}{\sqrt{4t}}, \quad dx = (\sqrt{4t})^n dz,$$

donde, si recordamos que  $x \in \mathbb{R}^n$ . Así, al calcular  $dx$  y derivamos cada variable  $x_i$ , obtenemos el factor  $(\sqrt{4t})$   $n$  veces. De esta forma, la integral que queremos calcular queda:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\sqrt{4t})^n e^{-|z|^2} dz &= \frac{(4t)^{n/2}}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz = \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|z_i|^2} dz_i = \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^n \sqrt{\pi} = 1. \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad viene de la integral de Gauss sobre la recta de los números reales.  $\square$

La idea detrás del lema anterior y de la elección específica de la constante  $B$ , nos permite asegurar que cuando  $t \rightarrow 0$ ,  $\Phi(x, t)$  se aproxima en el sentido de las distribuciones a la función Delta de Dirac en  $\mathbb{R}^n$ , este razonamiento lo detallaremos más adelante. La solución fundamental describe la variación de la temperatura en  $\mathbb{R}^n$  donde una fuente de calor puntual se sitúa en el origen en un tiempo  $t=0$ .

### 3.2.2. Problema de Cauchy para la Ecuación del Calor

Intentemos ahora buscar una solución al problema:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty). \\ u(x, 0) = g(x), & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3.14)$$

Sabemos que la función  $(x, t) \rightarrow \Phi(x, t)$  de la definición (3.1) es solución de la Ecuación del Calor (3.1) excepto en el punto  $(0, 0)$ . De esta manera, también será solución de dicha ecuación la función  $(x, t) \rightarrow \Phi(x - y, t)$  para cada variable  $y$  fija, con  $y \in \mathbb{R}^n$ , es decir, dicha solución es invariante mediante traslaciones. Esta comprobación es muy sencilla, supongamos que tenemos  $w(x, t) = \Phi(x - y, t)$  entonces:

$$w_t = \Phi_t(x - y, t), \quad w_{xx} = \Phi_{xx}(x - y, t).$$

Por tanto,  $w_t = w_{xx} \Rightarrow \Phi_t(x - y, t) = \Phi_{xx}(x - y, t)$  es solución de la Ecuación del Calor (3.1) tal y como queríamos demostrar.

En consecuencia, un candidato para ser solución del problema (3.14) es el producto de convolución de las funciones  $\Phi(x, t)$  y  $g(x) : u(x, t) = (\Phi(x, t) * g(x))$ . Este producto de convolución es finito (ver apéndice (B)) ya que, si suponemos que la función  $g(x)$  es acotada (lo cual haremos más adelante) y teniendo en cuenta que  $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1$ , entonces  $|(\Phi(x, t) * g(x))| < \infty$ .

Así, definimos:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy, \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Cabe mencionar que la solución fundamental del calor,  $\Phi(x, t)$ , tal y como se muestra en la definición (3.1), no está definida para  $t=0$ . Así, al decir que la solución  $u(x, t)$  de la ecuación (3.15) satisface la condición inicial del problema (3.14), para  $t = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , nos referimos a que se cumple:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = g(x),$$

donde este límite se produce punto a punto, es decir, la función  $u(x^0, t)$  converge cuando  $t \rightarrow 0^+$  a  $g(x^0)$  para todo punto  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ . Por lo tanto, deberemos comprobar que se cumple dicho límite y que efectivamente  $u(x, t)$  es solución del problema (3.14).

**Teorema 3.3** (Solución Ecuación del Calor con una condición inicial). *Suponiendo que  $g(x)$  es una función tal que  $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ . Entonces la función  $u$  dada por (3.15) está bien definida en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  y satisface:*

- (1)  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ .
- (2)  $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$ .
- (3)  $\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0, 0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(x, t) = g(x^0)$  para todo punto  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ .

*Demostración:* (1) La función  $u(x, t) = (\Phi(x, t) * g(x))$  cumple, por definición de derivada de una convolución (Ver apéndice (B), sección (B.1.1)) y teniendo en cuenta la regla de Leibniz (Ver apéndice (A), teorema (A.1)) en el que hemos demostrado que se cumplen las condiciones necesarias para aplicar dicha regla):

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (\Phi(x, t) * g(x)) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \Phi(x, t) * g(x) \right), \quad (i = 1 \dots n).$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , y, análogamente,  $\forall t > 0$ . Como hemos demostrado previamente, la función  $\Phi(x, t)$  es una función  $C^\infty$ , es decir, todas sus derivadas son finitas y continuas para todo  $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ . Así la función  $\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$  es infinitamente diferenciable en  $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty)$  para cada  $\delta > 0$  y, por tanto,  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ .

(2) Ahora, teniendo en cuenta lo que acabamos de comprobar:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x - y, t) g(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x - y, t) g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_t(x - y, t) g(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{xx}(x - y, t) g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [\Phi_t(x - y, t) - \Phi_{xx}(x - y, t)] g(y) dy = 0, \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n, t > 0). \end{aligned}$$

donde la última igualdad viene de que  $\Phi(x - y, t)$  es solución de la Ecuación del Calor.

(3) Para probar este último punto fijemos  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  y  $\epsilon > 0$ . Como  $g(x)$  es una función continua, por definición de continuidad, existe  $\delta > 0$  tal que

$$|g(y) - g(x^0)| < \epsilon, \quad \text{si } |y - x^0| < \delta, y \in \mathbb{R}^n. \quad (3.16)$$

Así, suponiendo que  $|x - x^0| \leq \frac{\delta}{2}$  tenemos, teniendo en cuenta el lema (3.2):

$$\begin{aligned} |u(x, t) - g(x^0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy - g(x^0) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(x^0) dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) [g(y) - g(x^0)] dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) |g(y) - g(x^0)| dy \\ &= \int_{B(x^0, \delta)} \Phi(x - y, t) |g(y) - g(x^0)| dy + \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} \Phi(x - y, t) |g(y) - g(x^0)| dy \\ &= I + J. \end{aligned}$$

Ahora, trabajando en las integrales I y J por separado, de las propiedades de la solución fundamental (3.16) y el lema (3.2), tenemos:

$$\begin{aligned} I &= \int_{B(x^0, \delta)} \Phi(x-y, t) |g(y) - g(x^0)| dy \\ &\leq \epsilon \int_{B(x^0, \delta)} \Phi(x-y, t) dy \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t) dy = \epsilon. \end{aligned}$$

Por otro lado, si  $|x - x^0| \leq \frac{\delta}{2}$  y  $|y - x^0| \geq \delta$ , por la desigualdad triangular tenemos:

$$|y - x^0| \leq |y - x| + |x - x^0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x^0|.$$

Así,

$$|y - x| \geq |y - x^0| - \frac{1}{2}|y - x^0| \geq \frac{1}{2}|y - x^0|. \quad (3.17)$$

Por tanto, teniendo en cuenta la ecuación (3.17) y que la función  $g(x)$  es acotada ( $g(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ), es decir, existe una constante  $K > 0$  tal que  $|g(x)| \leq K$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , tenemos:

$$\begin{aligned} J &= \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} \Phi(x-y, t) |g(y) - g(x^0)| dy \\ &\leq 2\|g(x)\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} \Phi(x-y, t) dy \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} \Phi(x-y, t) dy \\ &\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} e^{-\frac{|y-x^0|^2}{16t}} dy. \end{aligned}$$

donde C es una constante genérica. Realicemos un cambio de variable pasando a coordenadas polares en  $\mathbb{R}^n$  (ver apéndice D). Tomemos el cambio:

$$y - x_0 = r\gamma,$$

donde  $r = |y - x_0|$  y  $\gamma$  es la parte angular del cambio de variable ( $\gamma \in \mathbb{R}^n$  y  $|\gamma| = 1$ ) que pertenece a la esfera unidad en  $\mathbb{R}^n$ , ( $S^{n-1}$ ).

Por otro lado, como  $r = |y - x_0|$  y estamos en el conjunto  $\{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)\}$ , tenemos que  $r$ , que es la distancia de  $y$  a  $x_0$ , es, como mínimo,  $\delta$ . Así,  $r \in (\delta, \infty)$

Por tanto, realizando el cambio de variable a coordenadas polares nos queda:

$$\begin{aligned} J &\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} e^{-\frac{|y-x^0|^2}{16t}} dy = \frac{C}{t^{n/2}} \int_\delta^\infty \int_{S^{n-1}} e^{-\frac{r^2|\gamma|^2}{16t}} r^{n-1} d\gamma dr \\ &= \frac{C}{t^{n/2}} \int_\delta^\infty \int_{S^{n-1}} e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} d\gamma dr = \frac{C}{t^{n/2}} \int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} dr \int_{S^{n-1}} d\gamma. \end{aligned}$$

donde  $\int_{S^{n-1}} d\gamma$  es el área de la esfera unidad  $S^{n-1}$  (ver apéndice D), que es igual a una constante M. Así, tomando  $K=C \cdot M$  (C y M constantes genéricas) tenemos:

$$J \leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} dr \int_{S^{n-1}} d\gamma = \frac{K}{t^{n/2}} \int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} dr.$$

Si ahora pasamos al límite cuando  $t \rightarrow 0^+$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{K}{t^{n/2}} \int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} dr. \quad (3.18)$$

Mediante el teorema de convergencia dominada para funciones integrables (ver apéndice (B), teorema (B.3)) podemos pasar el límite bajo el signo integral. Para ello, debemos comprobar que se cumplen las

condiciones de dicho teorema. En primer lugar, es necesario demostrar que el integrando  $f_t(r) = e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1}$  cumple que:

$$|f_t(r)| \leq g, \quad \forall r \in (\delta, \infty),$$

donde  $g$  es una función integrable.

Comencemos viendo que

$$|e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1}| \leq K |e^{-\frac{r^2}{32t}}|, \quad (3.19)$$

donde  $K$  es una constante genérica. Demostremos esta desigualdad, despejando  $r^{n-1}$  tenemos:

$$|r^{n-1}| \leq K |e^{\frac{r^2}{32t}}| \Leftrightarrow \frac{1}{K} \leq \frac{1}{r^{n-1}} e^{\frac{r^2}{32t}}.$$

La función  $h(r) = \frac{1}{r^{n-1}} e^{\frac{r^2}{32t}}$  cumple que:

$$\lim_{r \rightarrow \delta} \frac{1}{r^{n-1}} e^{\frac{r^2}{32t}} = \frac{1}{\delta^{n-1}} e^{\frac{\delta^2}{32t}} \quad \text{finito para } \delta > 0, t \in (\delta, \infty).$$

y en el resto de puntos es continua. Además, esta función es creciente para un determinado  $\delta$ , es decir,

$$h'(r) = (-n+1)r^{-n} e^{\frac{r^2}{32t}} + \frac{2r}{32t} \frac{1}{r^{n-1}} e^{\frac{r^2}{32t}} = r^{-n} e^{\frac{r^2}{32t}} \left( (-n+1) + \frac{2r}{32t} + r \right) \geq 0, \quad \forall r \in (\delta, \infty), t > 0.$$

donde  $\delta = \frac{31t(n-1)}{2+32t}$  para  $t > 0, n \in \mathbb{N}$ . Por tanto, al ser  $h(r)$  una función continua y creciente para un cierto  $\delta > 0$ , es mayor que una constante, en particular es mayor que  $\frac{1}{K}$ , y queda demostrado lo que queríamos probar.

De esta manera hemos demostrado la desigualdad (3.19) y, además, se cumple que

$$K \int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{32t}} dr < \infty.$$

Esta integral es finita porque mediante un cambio de variable obtenemos la integral de Gauss cuyo valor es  $\pi$  (finito).

De esta forma, hemos encontrado una función integrable que acota a  $|f_t(r)|$ , cumpliéndose así, la condición necesaria del teorema de convergencia dominada para funciones integrales y podemos pasar el límite (3.18) dentro de la integral:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{K}{t^{n/2}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} dr = \int_{\delta}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{K}{t^{n/2}} e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} dr = 0.$$

debido a que la exponencial tiende a cero más rápido que la función potencia.

Así, recopilando todo lo que hemos visto anteriormente, para todo  $\epsilon > 0$  existe una constante  $\frac{\delta}{2}$ , tal que si  $|x - x^0| \leq \frac{\delta}{2}$  y  $t > 0$  suficientemente pequeño (recordemos que hemos tomado el límite cuando  $t \rightarrow 0^+$ ) entonces:

$$|I + J| < 2\epsilon \Rightarrow |u(x, t) - g(x^0)| < 2\epsilon,$$

o lo que es lo mismo

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0,0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(x, t) = g(x^0),$$

para todo punto  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , que es lo que queríamos demostrar. □

**Observaciones.** 1. Teniendo en cuenta el teorema (3.3) se puede escribir:

$$\begin{cases} \Phi_t - \Delta \Phi = 0, & (x \in \mathbb{R}^n, t > 0). \\ \Phi = \delta_0, & (x \in \mathbb{R}^n, t = 0). \end{cases} \quad (3.20)$$

donde  $\delta_0$  representa la delta de Dirac en  $\mathbb{R}^n$  con masa 1, es decir, tal que  $\int_{\mathbb{R}^n} \delta_0 = 1$ . Ver apéndice (C, sección (C.1) en el que se demuestra que la solución  $\Phi$  de la Ecuación del Calor se aproxima a una delta de Dirac en el punto  $t = 0$ .



2. Notemos que si la función  $g(x)$  cumple que  $g \geq 0$ ,  $g \not\equiv 0$  y es acotada y continua entonces:

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy,$$

es positiva para todo punto  $x \in \mathbb{R}^n$  y tiempo  $t > 0$ . Esta condición se interpreta diciendo que la Ecuación del Calor tiene velocidad infinita de propagación. Si el dato, o temperatura inicial, es no negativo y es positivo en algún punto, entonces la temperatura en un tiempo posterior (por muy pequeño que éste sea) es positiva en todos los puntos.

### 3.2.3. Ecuación del Calor no homogénea

Centrémonos ahora en el estudio de solución del problema no homogéneo con una condición inicial

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty). \\ u(x, 0) = 0, & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3.21)$$

Al suponer la condición inicial igual a cero, al contrario que en los casos anteriores, ya no disponemos de una fuente de calor en el momento  $t = 0$  y, sin embargo, al resolver este problema obtenemos una solución distinta de cero (tal y como veremos más adelante), es decir, hay una distribución de calor. Esto es debido a que la función  $f(x, t)$  mide el efecto físico de una fuente de calor externa, como puede ser, por ejemplo, un radiador encendido durante un tiempo  $t$  determinado. Así, la función  $f(x, t)$  describe el calor que produce dicha fuente en un espacio y tiempo determinados. Lógicamente, cuánto mayor sea la función  $f$ , más grande será la solución  $u(x, t)$  que determina la temperatura en el instante  $x$  y tiempo  $t$ .

Para calcular una solución de nuestro problema utilizaremos el llamado principio de Duhamel, similar al método de variación de parámetros para las EDO, que nos permite encontrar soluciones a problemas de evolución lineal no homogéneos con una condición inicial, como la Ecuación del Calor o la Ecuación de Ondas, si se conoce una solución del problema homogéneo. Lleva el nombre de Jean-Marie Duhamel quién aplicó por primera vez el principio a la ecuación del calor no homogénea.

Consideremos por ejemplo el problema de la Ecuación del Calor con una condición inicial (3.14):

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty). \\ u(x, 0) = g(x), & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

donde  $g(x)$  es la distribución de calor inicial.

Por otro lado, si consideramos el problema no homogéneo de la Ecuación del Calor (3.21) que se corresponde, tal y como hemos mencionado anteriormente, con añadir una fuente de calor externa en cada punto  $f(x, t)$ . De manera intuitiva, podemos pensar en el problema no homogéneo como un conjunto de problemas homogéneos cada uno de los cuales comienza en un intervalo de tiempo diferente  $t = t_0$ . Por linealidad, se pueden sumar (integrar) las soluciones resultantes a lo largo del tiempo  $t_0$  y obtener la solución del problema no homogéneo. Esta es la idea detrás del principio de Duhamel. (ver [18])

Volviendo a nuestra búsqueda de solución del problema (3.21), si recordamos la motivación que nos llevó a encontrar la solución (3.15) observamos que la aplicación  $(x, t) \rightarrow \Phi(x - y, t - s)$  es una solución de la Ecuación del Calor ( $y \in \mathbb{R}^n$  fijo,  $0 < s < t$ ). Ahora, siguiendo el razonamiento de la sección anterior, tenemos que, fijando  $s$ , la función:

$$u = u(x, t; s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy. \quad (3.22)$$

es solución del problema:

$$\begin{cases} u_t(\cdot; s) - \Delta u(\cdot; s) = 0, & \text{en } \mathbb{R}^n \times (s, \infty). \\ u(\cdot; s) = f(\cdot, s), & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = s\}. \end{cases} \quad (3.23)$$

Es un problema de condición inicial homogéneo de la forma (3.14) con el tiempo inicial  $t = 0$  reemplazado por  $t = s$  y la función  $g$  reemplazada por  $f(\cdot, s)$ .

Demostremos que la función (3.22) es, en efecto, solución del problema (3.23):

- En primer lugar debemos ver que  $u = u(x, t; s) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (s, \infty))$ .

Se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u &= \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x, t; s) = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (\Phi(x - y, t - s) f(y, s)) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} (x - y, t - s) f(y, s) dy, \end{aligned}$$

donde  $i = 1 \dots n$ ,  $s > 0$  fijo y  $f \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$ . El paso de la derivada bajo el signo integral se justifica de manera similar que en el teorema (3.3) (ver apéndice A, teorema (A.1)). Análogamente se sigue el mismo razonamiento derivando con respecto de  $t > s$ .

Como hemos visto al analizar las propiedades de la solución fundamental del calor, tenemos que la función  $\Phi(\cdot, t - s)$  es una función  $C^\infty$  tomando  $s$  fijo,  $t > s$ . Así la función  $\frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}$  es infinitamente diferenciable en  $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty)$  para cada  $\delta > s$  y, por tanto,  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (s, \infty))$ ,

- Se debe cumplir  $u_t(x, t; s) - \Delta u(x, t; s) = 0$  ( $x \in \mathbb{R}^n, t > s$ ).

$$\begin{aligned} u_t(x, t; s) - u_{xx}(x, t; s) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_t(x - y, t - s) f(y, s) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{xx}(x - y, t - s) f(y, s) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [\Phi_t(x - y, t - s) - \Phi_{xx}(x - y, t - s)] f(y, s) dy = 0, \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n, t > s). \end{aligned}$$

donde la última igualdad viene de que  $\Phi(x - y, t - s)$  es solución de la Ecuación del Calor.

- Por último, debemos comprobar que se cumple la condición inicial, es decir,  $u(x, t; s) = f(x, t; s)$ , ( $x \in \mathbb{R}^n, t = s$ ).

Cuando  $t = s$  se tiene:

$$u(x, t; s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, 0) f(y, s) dy,$$

que es la convolución  $(\Phi(\cdot, 0) * f(\cdot, s))(x)$  (ver apéndice (B)). Si recordamos las observaciones (3.19), vimos que la solución fundamental tiende a la función generalizada o distribución de la Delta de Dirac cuando el tiempo tiende a cero, es decir  $\phi(\cdot, 0) = \delta$  en términos de distribuciones. Así, podemos escribir la convolución anterior como

$$(\Phi(\cdot, 0) * f(\cdot, s))(x) = (\delta * f(\cdot, s))(x) = f(x, s),$$

donde la última desigualdad viene de una de las propiedades de la Delta de Dirac (ver C.7 en el Apéndice C).

Otra forma de demostrar que efectivamente  $u(x, t; s)$  es solución del problema (3.23) es transformar dicho problema en uno de la forma (3.14). Así, si recordamos el problema (3.23) y la función (3.22) y definimos:

$$u(x, t; s) = v(x, t - s), \tag{3.24}$$

donde  $v$  es una función definida en  $v: \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . De esta manera, el problema (3.23) se transforma en:

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0, & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty). \\ v(x, 0) = f(x, s), & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{3.25}$$

donde la condición inicial de este problema viene de tener en cuenta la condición inicial del problema (3.23):

$$u(x, s; s) = v(x, s - s) = v(x, 0) = f(x, s).$$

Así, hemos conseguido transformar el problema (3.23) en un problema de la forma (3.14) del cual conocemos una de las soluciones (3.15).

Por tanto, la solución del problema (3.25) será la convolución de la función  $\phi(x, t)$  con la función  $f(x, s)$  :

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \phi(x, t) * f(x, s) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x - y, t) f(y, s) dy, \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n, t > 0). \end{aligned} \quad (3.26)$$

De manera que, deshaciendo el cambio de variable (3.24) nos queda que una de las soluciones del problema (3.23) es:

$$u(x, t; s) = v(x, t - s) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x - y, t - s) f(y, s) dy, \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n, t > s).$$

es decir, la función (3.22).

Es fácil comprobar que, aunque acabemos de demostrar que la función  $u(x, t; s)$  resuelve el problema (3.23), esta función no es solución de nuestro problema inicial (3.21). Si recordamos el principio de Duhamel veíamos que, teniendo la solución a un problema homogéneo cuya condición inicial comienza en un tiempo  $t = t_0$ , podemos obtener una solución del problema no homogéneo integrando las soluciones del problema homogéneo a lo largo del tiempo  $t_0$ . De esta manera, podemos construir una solución del problema (3.21) a partir de las soluciones del problema (3.23) integrando estas con respecto a  $s$ . La idea es considerar

$$u(x, t) = \int_0^t u(x, t; s) ds \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0).$$

Desarrollando esta integral teniendo en cuenta la definición  $u(x, t, s)$  de la ecuación (3.22) tenemos:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t - s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x - y|^2}{4(t - s)}} f(y, s) dy ds. \end{aligned} \quad (3.27)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ .

Asumamos que la función  $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ , y, además, que tiene un soporte compacto (ver definición C.1 en el apéndice (C)).

**Teorema 3.4** (Solución del problema no homogéneo). *Definiendo  $u(x, t)$  como en (3.27) y siendo  $f$  una función que cumple las condiciones que acabamos de mencionar, entonces*

- (1)  $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ .
- (2)  $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$ .
- (3)  $\lim_{\substack{(x, t) \rightarrow (x^0, 0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(x, t) = 0$  para todo punto  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ .

*Demostración:* (1) Debido a que la función  $\phi$  tiene una singularidad en el punto  $(0, 0)$ , no podemos justificar directamente el paso de la derivada bajo el signo integral. Por lo tanto, seguiremos un procedimiento parecido al realizado en la demostración del teorema (3.3).

Comencemos realizando el cambiando de variable en la fórmula (3.27)

$$x - y \rightarrow y; \quad t - s \rightarrow s. \quad (3.28)$$

de manera que,

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f(x - y, t - s) dy ds.$$

Como  $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  tiene soporte compacto y  $\Phi = \Phi(s, y)$  es infinitamente diferenciable cerca de  $s = t > 0$ , tenemos que la convolución:

$$F(t, s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f(x - y, t - s) dy = (\Phi(\cdot, s) * f(\cdot, t - s))(x),$$

cumple que  $F(t, s) \in C_1^2((0, \infty) \times (0, \infty))$  donde  $x \in \mathbb{R}^n$  fijo (Ver Apéndice (B), teorema (B.2)). Por lo tanto, podemos usar la regla general de derivación bajo el signo integral (ver apéndice (A), teorema (A.2)) de manera que:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t F(t, s) ds = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f(x - y, t - s) dy ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x - y, 0) dy + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f(x - y, t - s) dy ds. \end{aligned}$$

Además, teniendo en cuenta la regla de Leibniz (ver apéndice (A), teorema (A.1)) tenemos:

$$u_t(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x - y, 0) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f_t(x - y, t - s) dy ds.$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} f(x - y, t - s) dy ds.$$

Así,  $u_t, D_x^2 u$ , y, de igual manera,  $u, D_x u$ , pertenecen a  $C(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$  tal y como queríamos demostrar.

(2) Ahora, calculamos:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \Delta x \right) f(x - y, t - s) \right] dy ds + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x - y, 0) dy \\ &= \int_{\epsilon}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \left[ \left( -\frac{\partial}{\partial s} - \Delta y \right) f(x - y, t - s) \right] dy ds \\ &\quad + \int_0^{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \left[ \left( -\frac{\partial}{\partial s} - \Delta y \right) f(x - y, t - s) \right] dy ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x - y, 0) dy = I_{\epsilon} + J_{\epsilon} + K. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Hemos realizado un cambio en las variables de integración teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x - y, t - s) = D_2(f(x - y, t - s)) \frac{\partial}{\partial t} (t - s).$$

$$\frac{\partial}{\partial s} f(x - y, t - s) = D_2(f(x - y, t - s)) \frac{\partial}{\partial s} (t - s).$$

Donde igualando ambas expresiones tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x - y, t - s) = -\frac{\partial}{\partial s} f(x - y, t - s)$$

Hemos procedido análogamente para demostrar que:

$$\Delta_x f(x - y, t - s) = \Delta_y f(x - y, t - s).$$

De esta manera, volviendo a la expresión (3.29), la función  $f$  tiene un máximo, tanto  $f$  como las derivadas mencionadas debido a que son funciones continuas de soporte compacto. Por tanto, si recordamos, además, que la solución fundamental del calor cumple que su integral en  $\mathbb{R}^n$  vale 1 para todo tiempo  $t > 0$  tenemos:

$$|J_{\epsilon}| \leq (\|f_t\|_{L^\infty} + \|D^2 f\|_{L^\infty}) \int_0^{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) dy ds \leq \epsilon C. \tag{3.30}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 I_\epsilon &= \overbrace{\int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \left( -\frac{\partial}{\partial s} f(x-y, t-s) \right) dy ds}^{(1)} \\
 &\quad + \overbrace{\int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) (-\Delta_y f(x-y, t-s)) dy ds}^{(2)}.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Si desarrollamos la integral (1) tenemos, aplicando el Teorema de Fubini (ver apéndice (A), teorema (A.3)) e integrando por partes:

$$\begin{aligned}
 \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \left( -\frac{\partial}{\partial s} f(x-y, t-s) \right) dy ds &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_\epsilon^t \Phi(y, s) \left( -\frac{\partial}{\partial s} f(x-y, t-s) \right) dy ds = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} [-\Phi(y, s) f(x-y, t-s)]_\epsilon^t dy + \int_{\mathbb{R}^n} \int_\epsilon^t -\frac{\partial}{\partial s} \Phi(y, s) f(x-y, t-s) dy ds = \\
 &= -\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x-y, 0) dy + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \epsilon) f(x-y, t-\epsilon) dy + \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \int_\epsilon^t \frac{\partial}{\partial s} \Phi(y, s) f(x-y, t-s) dy ds.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, si, teniendo en cuenta la integración por partes en  $\mathbb{R}^n$  (ver apéndice (A)), desarrollamos la integral (2) de (3.31):

$$\int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) (-\Delta_y f(x-y, t-s)) dy ds = \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta_y \Phi(y, s) f(x-y, t-s) dy ds$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}
 I_\epsilon &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_\epsilon^t \left( \frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) \Phi(y, s) f(x-y, t-s) dy ds \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \epsilon) f(x-y, t-\epsilon) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x-y, 0) dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \epsilon) f(x-y, t-\epsilon) dy - K.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

La primera integral es 0 ya que la función  $\Phi(y, s)$  resuelve la Ecuación del Calor. Así combinando (3.29), (3.30) y (3.32) tenemos, tomando el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned}
 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (u_t(x, t) - \Delta u(x, t)) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \epsilon) f(x-y, t-\epsilon) dy - K + 0 - K \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \epsilon) f(x-y, t-\epsilon) dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4\epsilon}} f(x-y, t-\epsilon) dy.
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Ahora, usando el teorema de convergencia dominada para funciones integrables podemos meter el límite anterior dentro de la integral. Para ello, necesitamos verificar que se cumplen las condiciones de dicho teorema (ver (B.3, apéndice (B))).

En primer lugar, al ser la función  $f(x, t)$  una función continua  $\forall x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ , si tomamos  $\epsilon$  fijo suficientemente pequeño,  $f(x-y, t-\epsilon)$  también es continua y, además, al ser una función con soporte compacto tiene un máximo, es decir:

$$f(x-y, t-\epsilon) \leq M, \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n, t > 0).$$

Por otro lado, se cumple que:

$$\left| e^{-\frac{|y|^2}{4\epsilon}} \right| \leq \left| e^{-\frac{|y|^2}{16\epsilon}} \right|,$$

donde se tiene que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{16\epsilon}} < \infty,$$

ya que, si realizamos un cambio de variable, obtenemos la integral de Gauss en  $\mathbb{R}^n$  cuyo valor es  $\pi^{n/2}$ . De esta manera tenemos que el integrando esta acotado en valor absoluto por una función integrable:

$$\left| e^{-\frac{|y|^2}{4\epsilon}} f(x-y, t-\epsilon) \right| \leq M \left| e^{-\frac{|y|^2}{16\epsilon}} \right|,$$

y podemos pasar el límite dentro de la integral. Así, volviendo a la ecuación (3.33) tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4\epsilon}} f(x-y, t-\epsilon) dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{n/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4\epsilon}} f(x-y, t-\epsilon) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, 0) f(x-y, t) dy, \end{aligned}$$

donde la última integral es la convolución  $(f(\cdot, t) * \Phi(\cdot, 0))(x)$ . Si recordamos que la solución fundamental del calor tiende a la función generalizada Delta de Dirac cuando el tiempo  $t$  tiende a cero entonces, por las propiedades de la Delta de Dirac, tenemos:

$$(f(\cdot, t) * \Phi(\cdot, 0))(x) = f(x, t).$$

Y, volviendo a la ecuación (3.33) concluimos que:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (u_t(x, t) - \Delta u(x, t)) = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4\epsilon}} f(x-y, t-\epsilon) dy = f(x, t), \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n, t > 0). \end{aligned}$$

tal y como queríamos demostrar.

(3) Finalmente, demostremos la última propiedad del teorema. Notemos que:

$$\|u(\cdot, t)\|_{\infty} \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(x-y, t-s)| |f(y, s)| dy ds \leq \|f\|_{L_{x,t}^{\infty}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(x-y, t-s)| dy ds \leq t \|f\|_{\infty} \rightarrow 0,$$

cuando la variable  $t$  tiende a cero.  $F$  es una función continua con soporte compacto luego, es acotada. Así, la función  $u(x, t)$  tiende a cero cuando  $t$  tiende a cero, tal y como queríamos demostrar.  $\square$

**Observaciones.** Notemos que si combinamos los teoremas (3.3) y (3.4) la función:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t) g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t-s) f(y, s) dy ds,$$

es, bajo las hipótesis de  $f$  y  $g$  en ambos teoremas, una solución de:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty). \\ u(x, 0) = g, & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

### 3.3. Unicidad de soluciones

En la sección anterior hemos encontrado una solución a la Ecuación del Calor sujeta a diversas condiciones. En el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales que tienen aplicaciones físicas, se suelen considerar como útiles aquellos problemas denominados "problemas bien planteados". Se define un problema bien planteado aquel que cumple diversos requisitos:

- Existencia de solución: Existe al menos una solución que satisfaga todas las condiciones iniciales y de contorno. Aunque esta condición es trivial, refleja que es posible plantear problemas de ecuaciones diferenciales para los que no exista solución.

- Unicidad: Existe como mucho una solución del problema. La mayoría de problemas de ecuaciones diferenciales, en concreto de ecuaciones en derivadas parciales, poseen multitud de soluciones pero, cuando se buscan soluciones a cuestiones físicas que se relacionan con problemas en la vida real, tener muchas soluciones es casi tan útil como no tener ninguna. Por ello, las ecuaciones se dotan de diversas condiciones iniciales y de contorno que garanticen una solución única.
- Estabilidad: Si existe solución y además es única, esta debe depender de manera estable de los datos del problema. Es decir, si realizamos pequeños cambios en las condiciones del problema, entonces la solución cambia en una cantidad muy pequeña. Esto matemáticamente significa: si las condiciones de contorno varían como una variable continua, entonces la solución correspondiente debe variar de manera continua. Esta condición es importante ya que en física nunca se pueden medir los datos con precisión matemática, sino sólo con algunos decimales. Así, si realizamos una pequeña perturbación de los datos, la solución no debería verse afectada por perturbaciones tan pequeñas. Es lo que se conoce como efecto mariposa. La estabilidad de las soluciones de la Ecuación del Calor se estudia en el libro de Evans [9, pág:59-60].

Estudiamos la unicidad de solución mediante el Principio del Máximo. Para ello, debemos introducir primero el siguiente teorema, cuya demostración aparece detallada en el libro de Evans [9] (pp.57).

**Teorema 3.5** (Principio del Máximo en el Problema de Cauchy). *Supongamos que  $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times (0, T])$  donde  $T > 0$ , es solución de:*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, T). \\ u(x, 0) = g, & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

y que, para ciertas constantes positivas  $A$  y  $a$ , se tiene la condición de crecimiento:

$$u(x, t) \leq Ae^{a|x|^2}, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T).$$

Entonces:

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

Enunciemos y demostremos ahora el teorema de unicidad de solución extraído del libro de Evans [9, pág.58].

**Teorema 3.6** (Unicidad para el Problema de Cauchy). *Sea  $g \in C(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \in C(\mathbb{R}^n \times (0, T])$ . Entonces existe como mucho una solución  $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times (0, T])$  donde  $T > 0$ , para el problema con una condición inicial:*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, T). \\ u(x, 0) = g, & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3.34)$$

que satisface la condición de crecimiento:

$$u(x, t) \leq Ae^{a|x|^2}, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T). \quad (3.35)$$

donde  $A, a$  son constantes positivas.

*Demostración.* Supongamos, por reducción al absurdo, que existen dos funciones  $u$  y  $\tilde{u}$  distintas que satisfacen (3.34) y (3.35) y sea  $w = \pm(u - \tilde{u})$ . Se tiene que, siendo  $w = u - \tilde{u}$  y, teniendo en cuenta la ecuación (3.34):

$$u_t - \tilde{u}_t - \Delta u + \Delta \tilde{u} = f - f \Rightarrow w_t - \Delta w = 0, \quad (\mathbb{R}^n \times (0, T)).$$

y además

$$w(x, 0) = u(x, 0) - \tilde{u}(x, 0) = 0.$$

Es decir,

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0, & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, T). \\ w(x, 0) = 0, & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Por otro lado,  $w$  satisface la condición de crecimiento (3.35) ya que tanto  $u$  como  $\tilde{u}$  la satisfacen. Así, se cumplen todas las hipótesis del teorema (3.5) y podemos concluir que:

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} w = \sup_{\mathbb{R}^n} g$$

como la función  $g$  en este caso es constantemente 0, se tiene que el supremo de la función  $w$  es también 0. De esta forma,  $w \leq 0$

Si aplicamos este mismo razonamiento a  $w = \tilde{u} - u$  deducimos que se cumple que  $w \geq 0$ .

Así, concluimos que la función  $w=0$  y, por tanto,  $u = \tilde{u}$  y hemos llegado a una contradicción con nuestra hipótesis.  $\square$

### 3.3.1. Ejemplo de Tikhonov

Cabe mencionar que de hecho existen infinitas soluciones del problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, T). \\ u(x, 0) = 0, & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3.36)$$

donde  $T > 0$ . Un buen ejemplo de este hecho es el ejemplo de Tikhonov de solución clásica no nula del problema homogéneo anterior. Ver el libro de John, capítulo 7 [18].

En efecto, Tikhonov construyó una solución  $u=u(x,t)$  de clase  $C^\infty$  para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$  tal que:

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0).$$

y de modo que,

$$u(x, t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0^+, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Este hecho entra en aparente contradicción con el resultado previamente probado, mediante el cual se garantiza la unicidad de solución.

La solución del calor de Tikhonov se construye de la siguiente manera: Consideremos el problema de la Ecuación del Calor de valores iniciales (3.36) con datos en el eje temporal:

$$\begin{cases} u(0, t) = g(t), \\ u_x(0, t) = 0. \end{cases} \quad (3.37)$$

donde elegimos, además, que  $g(t) = 0, \forall t \leq 0$  de manera que se cumpla la condición  $u(x, 0) = 0$ .

Buscamos una solución desarrollada en serie de potencias de la forma:

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(t) x^j.$$

Introduciendo esta serie en la ecuación (3.36) tenemos:

$$u_t = u_{xx} \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} g'_j(t) x^j = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(t) j(j-1) x^{j-2}, \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n, t > 0).$$

Si igualamos coeficientes:

$$\sum_{j=0}^{\infty} g'_j(t) x^j = \sum_{j=2}^{\infty} g_{j+2}(t) (j+2)(j+1) x^j \Rightarrow g'_j(t) = (j+1)(j+2) g_{j+2}(t). \quad (3.38)$$

Por otro lado, tomamos:

$$\begin{cases} g_0(t) = g(t). \\ g_1(t) = 0. \end{cases} \quad (3.39)$$

de manera que se cumplan las condiciones (3.37). Ahora, si distinguimos los siguientes dos casos y tenemos en cuenta la ecuación (3.38) y las condiciones que acabamos de imponer (3.39):



– j impar:

$$j = 1 \Rightarrow g'_1(t) = (2)(3)g_3(t) \Rightarrow g_3(t) = 0.$$

$$j = 3 \Rightarrow g'_3(t) = (4)(5)g_5(t) \Rightarrow g_5(t) = 0.$$

...

$$j = 2k - 1 \Rightarrow g'_{2k-1}(t) = (2k)(2k+1)g_{2k+1}(t) \Rightarrow g_{2k+1}(t) = 0.$$

– j par:

$$j = 0 \Rightarrow g'_0(t) = (1)(2)g_2(t) \Rightarrow g_2(t) = \frac{1}{2}g'_0(t).$$

$$j = 2 \Rightarrow g'_2(t) = (3)(4)g_4(t) \Rightarrow g_4(t) = \frac{1}{12}g'_2(t) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}g_0^{(2)}(t).$$

...

$$g_{2k}(t) = \frac{1}{(2k)!}g^{(k)}(t).$$

De manera que podemos escribir la solución  $u(x,t)$  como:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}. \quad (3.40)$$

Para  $\alpha > 1$  tomamos:

$$g(t) := \begin{cases} e^{-t^{-\alpha}}, & t > 0. \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

donde  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $g^{(k)}(0) = 0$ , cumpliéndose así la condición  $u(x,0)=0$ .

Estudiamos ahora la convergencia de la serie (3.40). Tomemos la frontera del disco

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - t| = \theta t\} \quad (3.41)$$

con  $\theta \in (0, t)$  número real a determinar,  $t \in (0, \infty)$ . Es este conjunto la función  $e^{-z^{-\alpha}}$  es holomorfa por ser la composición de dos funciones holomorfas, e  $y z^{-\alpha}$  para  $z > 0$  y, dado que el radio del disco es  $\theta t$  con  $\theta \in (0, t)$ , el disco no llega al origen y se encuentra dentro del conjunto donde la esponencial es holomorfa.

Podemos entonces usar la fórmula integral de Cauchy extraída de los apuntes del curso de variable compleja [17]:

**Teorema 3.7** (Fórmula Integral de Cauchy). *Sea  $U$  un subconjunto abierto del plano complejo  $\mathbb{C}$  y suponga que el disco cerrado*

$$D = \{z : |z - z_0| \leq r\},$$

*está completamente contenido en  $U$ . Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa y  $\gamma$  el círculo orientado en sentido antihorario, que forma la frontera de  $D$ , entonces para cualquier  $a$  en el interior de  $D$*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

*En particular, como las funciones holomorfas son analíticas se tiene:*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz.$$

Aplicamos entonces la Fórmula Integral de Cauchy a la función  $g(z)$  en la frontera descrita anteriormente (3.41) cuando  $t > 0$ , puesto que hemos visto que se cumplen las hipótesis del teorema (3.7):

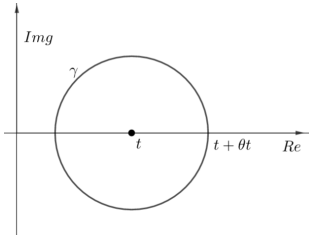


Figura 3.1: Representación de la circunferencia de centro  $t$  y radio  $\theta t$ .

$$g^{(k)}(t) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{-z^{-\alpha}}}{(z-t)^{k+1}} dz. \quad (3.42)$$

Parametricemos ahora la circunferencia (3.41) de centro  $t$  y radio  $t\theta$  representada en la figura (3.1). La parametrización de una circunferencia de centro 0 y radio  $\theta t$  en el plano complejo viene dado por  $r(z) = (\theta t \cos(z), \theta t \sin(z))$ , si añadimos el origen, el punto  $(t, 0)$  donde  $t \in \mathbb{R}$  tenemos:

$$\begin{aligned} r(z) &= (t + \theta t \cos(z)) + i(\theta t \sin(z)) \\ &= (t + 0i) + (\theta t \cos(z) + i\theta t \sin(z)) \\ &= t + \theta t e^{iz} \quad z \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

De manera que la circunferencia (3.41) nos queda:

$$\gamma = \{z = t(1 + \theta e^{iz}) : z \in [0, 2\pi]\}.$$

Así, volviendo a la función  $e^{-z^{-\alpha}}$ , tenemos que:

$$-z^{-\alpha} = -t^{-\alpha}(1 + \theta e^{iz})^{-\alpha},$$

y si acotamos la parte real

$$\operatorname{Re}(-z^{-\alpha}) = -t^{-\alpha} \operatorname{Re}((1 + \theta e^{iz})^{-\alpha})$$

donde, por continuidad de  $\theta$  para un  $\theta$  adecuado se tiene:

$$\operatorname{Re}((1 + \theta e^{iz})^{-\alpha}) > \frac{1}{2}.$$

De forma que:

$$\operatorname{Re}(-z^{-\alpha}) \leq -\frac{1}{2}t^{-\alpha}.$$

Sustituyendo esta desigualdad en la derivada  $k$ -ésima de la función  $g(t)$  (3.42) y recordando que nos encontramos en el conjunto (3.41) tenemos:

$$\begin{aligned} |g^{(k)}(t)| &\leq \frac{k!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{-\frac{1}{2}t^{-\alpha}}}{|z-t|^{k+1}} dz = \frac{k!}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}t^{-\alpha}} \frac{1}{(\theta t)^{k+1}} \int_{\gamma} 1 dz \\ &= \frac{k!}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}t^{-\alpha}} \frac{1}{(\theta t)^{k+1}} 2\pi \theta t = \frac{k!}{(\theta t)^k} e^{-\frac{1}{2}t^{-\alpha}}. \end{aligned}$$

Finalmente, si reemplazamos la acotación anterior de la función  $g(t)$  en la definición que hemos dado anteriormente de la solución  $u(x, t)$  (3.40):

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |g^{(k)}(t)| \frac{|x|^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(\theta t)^k} e^{-\frac{1}{2}t^{-\alpha}} \frac{|x|^{2k}}{(2k)!} \\ &\leq e^{-\frac{1}{2}t^{-\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{|x|^2}{\theta t} \right)^k \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Si recordamos que la función exponencial se puede escribir como serie de potencias de la forma:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Podemos concluir que

$$|u(x, t)| \leq e^{-\frac{1}{2}t^{-\alpha} + \frac{|x|^2}{\theta t}} < \infty, \quad (3.43)$$

para todo  $(x, t)$  con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$  y  $\alpha > 1$  de manera que  $u(x, t)$  es una función finita, tal y como acabamos de ver, y continua (ver apéndice (A)).

De esta manera hemos construido infinitas soluciones del problema (3.36). La razón por la que aparentemente no se cumple el teorema de unicidad (3.6) es debido a que esta solución  $u(x, t)$  que acabamos de construir no cumple la condición del teorema:

$$u(x, t) \leq A e^{a|x|^2}, \quad \forall t > 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

para ciertas constantes positivas  $a, A$ .

---

# CAPÍTULO 4

---

## ECUACIÓN DE FISHER-KPP

Una vez hemos estudiado la ecuación de difusión, podemos introducir un nuevo término en nuestra ecuación. Si recordamos el recipiente cilíndrico, mencionado en el capítulo (2), que contenía agua y yodo en su interior, en el que las partículas de yodo se difundían en el agua, vimos que cada una de estas partículas se comportaba de manera independiente al resto, chocando numerosas veces entre sí. A este proceso de interacción entre varias partículas que produce una reacción entre las mismas, caracterizada por procesos de consumo, transformación o destrucción, se le llama proceso de reacción. Si se consideran los dos modelos conjuntamente, es decir, la difusión y la reacción, cada sustancia se puede modelar a partir de ecuaciones de reacción-difusión.

Análogamente, este modelo de Reacción-Difusión nos sirve para modelar la propagación de especies, tal y como veremos en la llamada "*Ecuación de Fisher-KPP*".

De esta manera, muchos procesos naturales envuelven inherentemente ambos mecanismos de difusión y reacción, y la mayoría de esos problemas suelen modelarse mediante las ecuaciones de difusión-reacción de la forma:

$$u_t - Du_{xx} = f(u), \quad (4.1)$$

donde  $f(u)$  es el término de reacción. Las ecuaciones de Reacción-Difusión son no lineales si el término de reacción es no lineal en  $u$ .

### 4.1. Modelo logístico

Uno de los modelos más utilizados para estudiar el crecimiento de poblaciones o enfermedades epidémicas es el llamado modelo logístico.

Sea  $u(t)$  el tamaño de una población en el instante  $t$  y  $u'(t)$  la tasa de cambio del tamaño de la población. Asumamos que la tasa de crecimiento de la población depende solamente del tamaño de la población. Esta suposición parece razonable si hablamos de organismos simples como los micro-organismos. Sin embargo, para organismos más complicados como plantas, animales o humanos esto es una simplificación excesiva puesto que ignora las competiciones intraespecíficas por los recursos así como otros importantes factores.

Ese modelo logístico queda formalizado por la ecuación diferencial (ver [5]):

$$u'(t) = ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) \quad (4.2)$$

donde  $r$  es la tasa de crecimiento y  $K$  es la capacidad de carga. La capacidad de carga es el número máximo de individuos que pueden existir en un hábitat con los recursos disponibles. El tamaño de una población está limitado por factores medioambientales como la comida, el agua, la interacción con otras especies....

Inicialmente si  $u$  es pequeño, el tamaño de crecimiento  $ru$  en (4.2) es dominante y se produce un crecimiento rápido de la población; a medida que  $u$  se vuelve grande, el término cuadrático  $-ru^2/K$  aparece para inhibir el crecimiento. Es decir, para pequeños valores de la magnitud  $ru$ , este crecimiento se asemeja al crecimiento exponencial. Sin embargo, a partir de un cierto punto el crecimiento se vuelve más lento, este comportamiento

representa, por ejemplo, una epidemia: al principio se propagan sin control muy rápidamente, cada “infectado” es susceptible de contagiar a cualquier individuo que tenga contacto con él, pero cuando el número de “infectados” crece es más difícil que existan personas que no hayan estado contagiadas previamente. Para un tiempo grande  $t$ , la población se acerca al estado asintóticamente estable  $u=K$ , la capacidad de carga. [5]

Esta EDO (4.2), se puede resolver explícitamente obteniéndose, para una población inicial  $u_0$ , la solución: [5]

$$u(t) = \frac{Ku_0}{u_0 + e^{-rt}(K - u_0)}, \quad 0 < u_0 < K.$$

## 4.2. Ecuación de Fisher-KPP

Ahora añadimos a la ecuación logística (4.2) la variable espacial. Supongamos que la población  $u$  es la densidad de población y depende de la variable espacio  $x$  así como de la variable tiempo  $t$ , esto es,  $u = u(x, t)$ . Así, podemos formular la siguiente ecuación (ver Logan [20, sección:5.4]):

$$u_t - u_{xx} = ru \left(1 - \frac{u}{K}\right), \quad (4.3)$$

donde  $f(u) = ru(1 - u/K)$  viene dado por la ley de crecimiento logístico. Esta ecuación de reacción-difusión es la llamada ecuación de Fisher-KPP.

Fisher estudió esta ecuación en el contexto de investigar la evolución de un gen ventajoso en una población dada. Aunque también la estudiaron, de manera independiente a Fisher, los rusos Kolmogorov, Petrovsky y Piscounov tomando un término general de reacción, de aquí el nombre de Fisher-KPP.

Reescribamos la ecuación de Fisher-KPP (4.3) en una versión en menos dimensiones. Reescalando el tiempo, el espacio y la concentración de la siguiente forma:

$$\bar{t} = \frac{t}{r^{-1}}, \quad \bar{x} = \frac{x}{\sqrt{D/r}}, \quad \bar{u} = \frac{u}{K}.$$

Por lo tanto,  $\bar{u}$  mide la población en relación con la capacidad de carga,  $K$ .  $\bar{t}$  mide el tiempo en relación con la tasa de crecimiento,  $r$  y  $\bar{x}$  mide la distancia en relación con  $\sqrt{D/r}$ . Así,

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u \left( \frac{x}{\sqrt{D/r}}, \frac{t}{r^{-1}} \right). \\ \bar{u}_{\bar{t}} &= ru_t \left( \frac{x}{\sqrt{D/r}}, \frac{t}{r^{-1}} \right), \quad \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{r}{D} u_{xx} \left( \frac{x}{\sqrt{D/r}}, \frac{t}{r^{-1}} \right). \end{aligned}$$

De manera que la ecuación (4.3) queda:

$$r\bar{u}_{\bar{t}} + D\frac{r}{D}\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} = r\bar{u}(1 - \bar{u}) \Rightarrow \bar{u}_{\bar{t}} + \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} = \bar{u}(1 - \bar{u}).$$

Para simplificar la notación, vamos a estudiar la ecuación de Fisher de la siguiente forma, siguiendo el libro de Logan [20, sección:5.4]:

$$u_t - Du_{xx} = u(1 - u). \quad (4.4)$$

## 4.3. Soluciones de tipo onda viajera

### 4.3.1. Ondas viajeras

En física una onda consiste en la propagación de una perturbación de alguna propiedad de un medio como, por ejemplo, densidad o presión, a través de dicho medio. La magnitud física cuya perturbación se propaga en el medio se expresa como una función tanto del tiempo como de la posición,  $u(x, t)$ .

Una onda viajera es una onda que viaja en una dirección particular conservando una forma fija. Además, una

onda viajera se caracteriza por tener una velocidad constante a lo largo de su curso de propagación. Tales ondas se observan en numerosas áreas de la ciencia como la combustión o en la biología matemática, donde los impulsos que se manifiestan en las fibras nerviosas están representados como ondas viajeras.

La forma matemática más simple de representar una onda es:

$$u(x, t) = U(z), \quad \text{donde } z = x - ct. \quad (4.5)$$

La función  $U(z)$  representa la onda y se denomina *Perfil de la onda*, cuando  $t=0$  la onda tiene la forma  $U(x)$  que se llama *Perfil inicial de la onda*. Así, la función  $U(z) = U(x - ct)$  representa el perfil de la onda en el tiempo  $t$ , es decir, el perfil inicial de la onda trasladado  $ct$  unidades espaciales a la derecha. La constante  $c$  representa la velocidad de la onda.

Evidentemente, la función (4.5) representa una onda que viaja hacia la derecha con velocidad  $c$ . Análogamente,  $u(x, t) = U(x + ct)$  representa una onda que viaja hacia la izquierda con velocidad  $c$ . Este tipo de ondas se propagan sin distorsiones a lo largo de las líneas rectas  $x - ct = cte$  ( $x + ct = cte$ ) en un tiempo  $t$ .

Una cuestión clave averiguar si una solución de tipo onda viajera existe para una EDP dada (ver Logan [20]). Generalmente, esta pregunta se plantea sin tener en cuenta las condiciones iniciales de manera que se asume que la onda existe para todo tiempo  $t$ . Sin embargo, para poder asegurar la existencia de este tipo de soluciones debemos imponer las condiciones:

$$U(-\infty) = cte, \quad U(\infty) = cte. \quad (4.6)$$

Una *solución de frente de onda* (*frontwave solution*) es una solución de tipo onda viajera de la forma (4.5) sujeta a las condiciones (4.6), es decir, se acerca a valores constantes cuando  $z \rightarrow \pm\infty$ , no necesariamente la misma constante en ambos límites. Además, asumimos que la función  $U$  tiene el grado de suavidad requerido en la EPD ( $C^1(\mathbb{R}), C^2(\mathbb{R})\dots$ ). Si  $U$  se aproxima a la misma constante en  $+\infty$  y  $-\infty$ , la solución de frente de onda se llama *Pulso*.

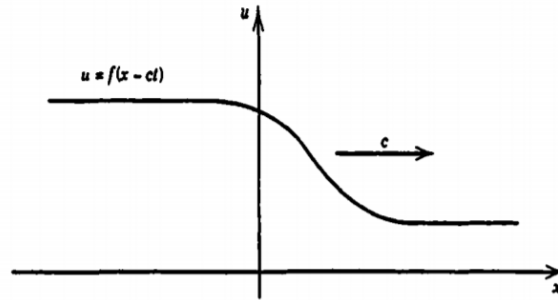


Figura 4.1: Representación de una solución de frente de onda. Imagen extraída de [20, Figura:1.5].

#### 4.3.2. Solución de tipo onda viajera de la ecuación de Fisher-KPP

Una vez hemos definido el concepto de onda viajera, procedemos a estudiar si la ecuación de Fisher-KPP (4.4) admite soluciones de este tipo. Para el análisis de este tipo de soluciones nos basamos en el libro de Logan [20, sección:5.4].

Buscamos soluciones de la forma (4.5), donde  $c$  es una constante positiva que, aunque a priori es desconocida, determinaremos el valor adecuado como parte de la solución del problema. Por otro lado, la función  $U$ , que, tal y como hemos mencionado anteriormente, representa el Perfil de la onda, debe ser dos veces continuamente diferenciable en  $\mathbb{R}$  ( $U \in C^2(\mathbb{R})$ ) y cumplir las condiciones (4.6).

Así, sustituyendo (4.5) en (4.4) obtenemos la siguiente ecuación ordinaria diferencial de segundo orden:

$$\begin{aligned} U_t(x - ct) - DU_{xx}(x - ct) &= U(1 - U) \Rightarrow \\ -cU' - U'' &= U(1 - U), \quad -\infty < z < \infty. \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde  $U'(z) = dU/dz$ . Esta ecuación diferencial no lineal se puede reducir a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden mediante el siguiente cambio de variable:

$$V = U'.$$

De manera que obtenemos el siguiente sistema autónomo:

$$\begin{cases} U' = V. \\ V' = -cV - U(1 - U). \end{cases} \quad (4.8)$$

Los puntos críticos de este sistema en el plano de fases UV se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} V = 0. \\ -cV - U(1 - U) = 0. \end{cases}$$

Así, los puntos críticos son  $P = (0, 0)$  y  $Q = (1, 0)$ . Analicemos la estabilidad de ambos puntos obteniendo, en primer lugar, la matriz Jacobiana del sistema (4.8):

$$J(U, V) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial U} & \frac{\partial V}{\partial V} \\ \frac{\partial(-cV - U(1 - U))}{\partial U} & \frac{\partial(-cV - U(1 - U))}{\partial V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2U - 1 & -c \end{pmatrix}.$$

Calculemos ahora los autovalores de esta matriz para cada uno de los puntos críticos:

### I. Consideremos el punto $Q = (1, 0)$ .

Los autovalores de la matriz Jacobiana en el punto  $(1, 0)$  son el resultado de resolver el siguiente sistema:

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -c - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (-\lambda)(-c - \lambda) - 1 = \lambda^2 + c\lambda - 1 = 0.$$

Obteniéndose los autovalores:

$$\lambda_1 = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4}}{2} \quad y \quad \lambda_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}.$$

Recordando que la constante  $c$ , que representa la velocidad de la onda viajera, es positiva, podemos asegurar que ambos autovalores son reales y de signos opuestos ( $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ) y, por tanto, el punto  $(1, 0)$  es un **Punto de Silla**.

### II. Consideremos el punto $P = (0, 0)$

Análogamente al caso del punto  $Q$ , los autovalores de la matriz Jacobiana en el punto  $(0, 0)$  son el resultado de resolver el siguiente sistema:

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -c - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (-\lambda)(-c - \lambda) + 1 = \lambda^2 + c\lambda + 1 = 0.$$

Obteniéndose los autovalores:

$$\lambda_3 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4}}{2} \quad y \quad \lambda_4 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4}}{2},$$

Si  $c^2 \geq 4$ , ambos autovalores son reales y negativos y, por tanto, el origen es un **Nodo Estable**. Por otro lado, dicho punto es un **Nodo Estrella Estable** si  $c^2 < 4$  (los autovalores son complejos con parte real negativa).

Ahora, obtengamos las direcciones de las trayectorias con el objetivo de poder dibujar el mapa de fases que represente el conjunto de trayectorias y direcciones en el plano UV.

En primer lugar, calculemos las tangentes horizontales ( $V' = 0$ ) y las tangentes verticales ( $U' = 0$ ) del sistema:

$$V' = 0 \iff V = -\frac{U(1 - U)}{c}.$$

$$U' = 0 \iff V = 0.$$

Además, podemos estudiar el comportamiento de las trayectorias en el mapa de fases:

$$\begin{aligned} V' > 0 &\iff V < \frac{U(U-1)}{c}, & V \text{ crece.} \\ V' < 0 &\iff V > \frac{U(U-1)}{c}, & V \text{ decrece.} \\ U' > 0 &\iff V > 0, & U \text{ crece.} \\ U' < 0 &\iff V < 0, & U \text{ decrece.} \end{aligned}$$

Mediante el campo de direcciones que acabamos de detallar podemos construir los siguientes mapas de fases:

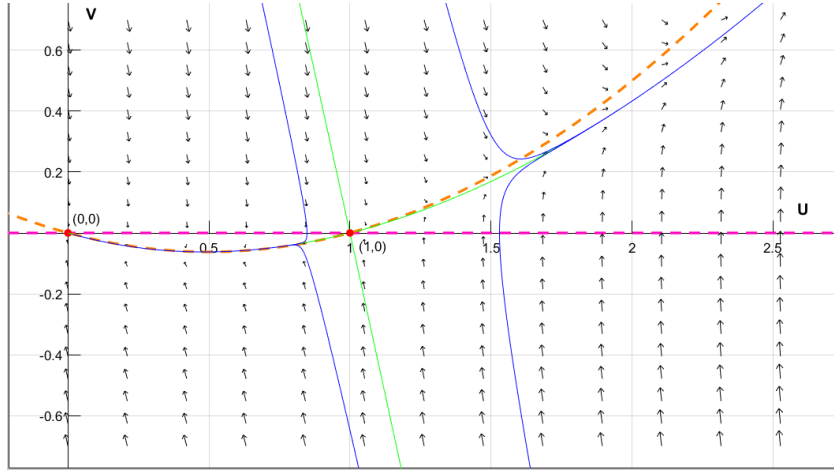


Figura 4.2: Mapa de fases en el caso  $c = 4$  en el que el punto  $(0,0)$  representado en color rojo es un nodo estable y el punto  $(1,0)$  es un punto de silla.

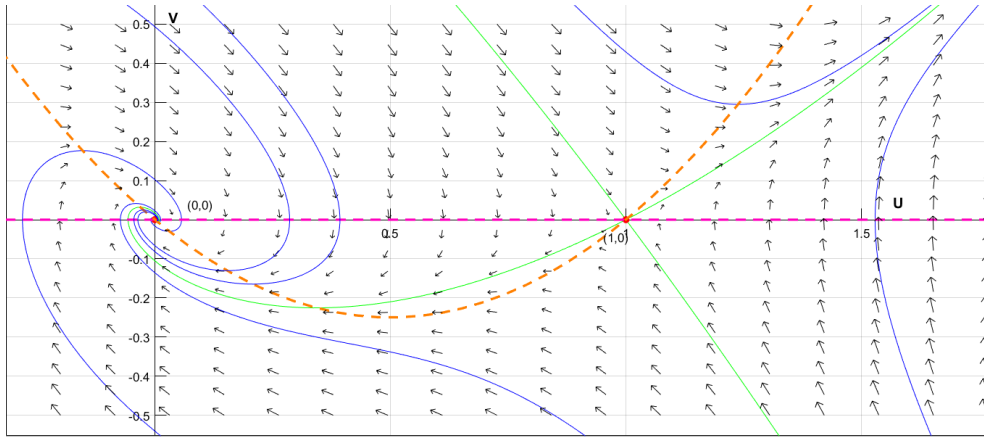


Figura 4.3: Mapa de fases en el caso  $c = 2$  en el que el punto  $(0,0)$  representado en color rojo es un nodo estrella estable y el punto  $(1,0)$  es un punto de silla.

Observamos como en ambos mapas de fases (4.2) y (4.3) las tangentes horizontales  $V = 0$ , representada en color rosa, y  $V = -U(1-U)/c$ , en color naranja, determinan claramente los cambios de direcciones en las trayectorias (representadas en color azul).

Dado que el *Perfil de la onda*,  $U(z)$ , debe tener límites finitos cuando  $z \pm \infty$ , tal y como supusimos en (4.6), y dado que los únicos puntos límite de las soluciones de un sistema autónomo son los puntos críticos (ver apuntes del curso de teoría cualitativa de EDO [16]), buscar soluciones de tipo onda viajera de (4.7) es equivalente a buscar trayectorias en el sistema (4.8) que unan ambos puntos críticos. Debido a que el punto  $P = (0,0)$  es

un punto estable (las trayectorias se aproximan a dicho punto) y  $Q = (1, 0)$  es un punto crítico inestable (las trayectorias se alejan de este punto), si existe una trayectoria que una ambos puntos, este camino sólo puede conectar  $Q$  hacia  $P$ . Ver libro de Logan [20]

En resumen, el camino que conecte  $Q$  hacia  $P$ , si existe, está definido por las funciones  $U=U(z)$  y  $V=V(z)$ , con las condiciones de contorno  $U(z) \rightarrow 1$  cuando  $z \rightarrow -\infty$  y  $U(z) \rightarrow 0$  cuando  $z \rightarrow \infty$ . A continuación estudiaremos la existencia de una solución de tipo onda viajera que conecte ambos puntos críticos para los dos casos posibles (4.2) y (4.3).

En el caso  $c^2 \leq 4$ , el origen es un nodo estrella estable y, en un entorno cercano a este punto, la función  $U(z)$  oscila con valores negativos, tal y como podemos observar en la figura (4.3).

Si recordamos cuando introdujimos el modelo de Fisher-KPP, definimos la función  $U$  como la densidad de población. Así, que dicha función pueda tomar valores negativos cuando el origen es un nodo estrella estable carece de sentido físico, por lo que descartamos este caso.

Para el caso  $c^2 \geq 4$ , existe un camino único que une el punto  $Q$  en  $z = -\infty$  con el punto  $P$  en  $z = \infty$ . La demostración de esta existencia es más técnica y no la realizaremos en este trabajo, aunque se pueden consultar las referencias: artículo de Kolmogorov, Petrovsky y Piscounov [1] y artículo de Aronson y Weinberger [3, pág:49].

## 4.4. Existencia de solución

En esta sección vamos a estudiar la existencia de solución en un problema de Cauchy no lineal con una condición inicial, aunque se puede realizar en  $\mathbb{R}^n$ , nos centraremos en el caso  $n = 1$  para simplificar las cuentas. Basaremos el estudio de existencia de solución en el que aparece en el libro de Logan [20, sección:6.3]:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = f(u), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.9)$$

donde las condiciones sobre  $u_0$  y el término de reacción  $f(u)$  serán impuestos más adelante.

Por supuesto, la mejor estrategia a la hora de mostrar si existe una solución a un problema dado es buscar una fórmula para la solución. Para algunos problemas lineales podemos proceder de esta manera. Por ejemplo, tal y como hicimos para buscar una solución de la Ecuación del Calor no homogénea con una condición inicial (sección 3.2.3). Sin embargo, en el caso de problemas no lineales es generalmente imposible encontrar dichas fórmulas por lo que se deben encontrar métodos alternativos que prueben la existencia.

Teniendo en cuenta las ideas que se exponen en el apéndice E (E) en el que se presenta el método del punto fijo para encontrar soluciones en problemas no lineales, consideramos entonces la existencia de una solución para el problema no lineal con una condición inicial (4.9). El ejemplo del método del punto fijo en EDOs (ver apéndice E (E)) nos sugiere la estrategia de escribir el problema como una ecuación integral (E.5). Una pista de como conseguir reescribir nuestro problema (4.9) de esta manera, nos la da la solución que encontramos del problema no homogéneo con una condición inicial de la Ecuación del Calor definida en (3.2.3).

Por el momento, asumamos que  $f$  y  $u_0$  son funciones acotadas y continuas en  $\mathbb{R}$ . Si  $u(x, t)$  es una solución del problema (4.9) entonces:

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= f(u(x, t)) = g(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Así, de (3.2.3) y el principio de Duhamel esperamos que:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t - s) g(y, s) dy ds,$$

o

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t - s) f(u(y, s)) dy ds, \quad (4.11)$$

que se corresponde con integrar el problema (4.10), donde  $\Phi(x - y, t)$  es la función gaussiana y la función  $f(u(y, s))$  no es conocida. Así, la anterior ecuación nos da una propiedad que cumple la solución de nuestro problema que, al contrario que en el caso de la Ecuación del Calor, no se trata de una fórmula de representación de la solución. Intentemos resolver la ecuación (4.11) encontrando un punto fijo para:

$$\phi(u)(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t - s) f(u(y, s)) dy ds.$$



es decir, demostremos que  $\exists u$  tal que  $\phi(u) = u$ . Así, podemos definir el proceso iterativo  $u_{n+1} = \phi(u_n)$  (ver apéndice E ecuación (E.7)):

$$u_{n+1}(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t - s) f(u_n(y, s)) dy ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

con

$$u_0(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy,$$

donde este término es la solución de la Ecuación del Calor lineal, homogénea con una condición inicial  $u(x, 0) = u_0(x)$ . No se deben confundir los términos  $u_0(x, t)$  y  $u_0(x)$  pues son diferentes.

Por lo tanto, teniendo en cuenta todo lo que acabamos de explicar, podemos introducir el siguiente teorema de existencia de solución extraído del libro de Logan [20, pág:298].

**Teorema 4.1** (Existencia-Unicidad). *Consideremos el problema con una condición inicial (4.10) donde  $u_0(x)$  es una función acotada y continua en  $\mathbb{R}$  y  $f$  es una función continua y acotada en  $\mathbb{R}$  que satisface la condición de Lipschitz:*

$$|f(u) - f(v)| \leq k|u - v|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R},$$

donde  $k$  es una constante positiva independiente de  $u$  y  $v$ . Bajo estas condiciones, para cualquier  $T > 0$  existe una única solución acotada  $u(x, t)$  de (4.10) para  $x \in \mathbb{R}, T > 0$ .

La condición de Lipschitz nos garantiza la existencia de punto fijo (ver apéndice E). Ver demostración de este teorema en el libro de Logan [20, pág.298].

Sin embargo, este teorema que acabamos de introducir tiene una hipótesis muy estricta sobre el término de reacción  $f(u)$ . Es por ello que el término de reacción de la ecuación de Fisher-KPP  $f(u) = u(1 - u)$  no satisface esta condición:

$$|f(u) - f(v)| = |u - u^2 - v + v^2| = |(u - v) + (v - u)(v + u)| = |(u - v)(1 - u - v)|.$$

Es evidente que el término de la derecha no se puede acotar por  $k|u - v| \forall u, v \in \mathbb{R}$ . Sin embargo, si restringimos  $u$  y  $v$ , el factor  $|1 - u - v|$  puede acotarse obteniéndose, de esta manera, una forma local de la condición de Lipschitz. Por lo tanto, nuestro propósito ahora es encontrar un teorema de existencia y unicidad debilitando las hipótesis del teorema (4.1) a una condición de Lipschitz local.

Para ello, vamos a utilizar las nociones de espacio de Banach y el teorema de punto fijo de Banach (ver apéndice (F)). En primer lugar, establezcamos la notación que vamos a utilizar.

Consideremos la función  $u = u(x, t)$ . Para cada tiempo  $t$  fijo podemos considerar  $u$  como una función de  $x$  (en  $\mathbb{R}$ ) que representa una “porción” de la superficie  $u(x, t)$  en un tiempo  $t$ . El espacio de Banach que vamos a formular a continuación especificará que tipo de funciones serán. Así, tomemos  $B$  un espacio de Banach compuesto por todas las funciones continuas y acotadas  $u(x, t)$  en  $\mathbb{R}$  ( $t$  fijo) y sea  $\|u(\cdot, t)\|_B$  la norma de la función  $u(x, t)$  en  $B$ , que definimos como:

$$\|u(\cdot, t)\|_B = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t)| \quad \text{para } t \text{ fijo.} \quad (4.12)$$

Sea  $t > 0$  fijo, demostremos que  $B$ , para este  $t$  fijo que acabamos de definir, es un espacio de Banach con la norma (4.12), es decir, que es un espacio vectorial normado completo. Para ello, veamos que toda sucesión de Cauchy contenida en  $B$  converge a un elemento de  $B$ . Vamos a basar nuestra demostración en la que aparece en el libro de Bressan [6, Lema:3.1].

Sea  $\{u_n(\cdot, t)\}$  una sucesión de Cauchy en  $B$ , es decir, dado  $\epsilon > 0$  existe un entero positivo  $N$  tal que  $\|u_n(\cdot, t) - u_m(\cdot, t)\|_B < \epsilon, \forall n, m \geq N$  (ver apéndice (F)). Por tanto, por definición de la norma de  $B$  (4.12) y de sucesión de Cauchy, para todo  $x \in \mathbb{R}$  tenemos:

$$|u_n(x, t) - u_m(x, t)| \leq \|u_n(\cdot, t) - u_m(\cdot, t)\|_B < \epsilon. \quad (4.13)$$

Esto implica que para cada  $x \in \mathbb{R}$ , la sucesión de números reales  $\{u_n(x, t)\}$  es una sucesión de Cauchy. Como  $\mathbb{R}$  es un espacio completo,  $\{u_n(x, t)\}$  es convergente en  $\mathbb{R}$ . Supongamos que  $\{u_n(x, t)\}$  converge a  $u(x, t)$  con  $x \in \mathbb{R}$  y un  $t > 0$  fijado al comienzo de la demostración.

Veamos, entonces, que la función  $u(\cdot, t)$  pertenece a  $B$ , es decir, que es una función continua y acotada y, por

otro lado, veamos que la sucesión de Cauchy en  $B$ ,  $\{u_n(\cdot, t)\}$ , converge hacia  $u(\cdot, t)$ .

De la desigualdad (4.13) tenemos:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(x, t) - u_m(x, t)| < \epsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Tomando el límite  $m \rightarrow \infty$ , como la sucesión  $\{u_m(x, t)\}$  converge a  $u(x, t)$  con  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  fijo:

$$\sup_{n \geq N} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(x, t) - u(x, t)| < \epsilon.$$

De donde obtenemos las siguientes desigualdades:

$$\sup_{n \geq N} \|u_n(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_B < \epsilon.$$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t)| &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t) + u_N(x, t) - u_N(x, t)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t) - u_N(x, t)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_N(x, t)| \\ &< \epsilon + \|u_N(\cdot, t)\|_B < \infty. \end{aligned}$$

La primera desigualdad, dado que  $\epsilon > 0$  cualquiera, muestra que  $\{u_n(\cdot, t)\}$  converge a  $u(\cdot, t)$ . La segunda desigualdad muestra que  $u(\cdot, t)$  es acotada. Por lo tanto, solo nos queda ver que  $u(\cdot, t)$  es continua.

Sea  $x \in \mathbb{R}$  y  $\epsilon > 0$  dado. Como  $\{u_n(x, t)\}$  converge a  $u(x, t)$ , por definición de convergencia, existe un entero  $N$  tal que  $|u_N(x, t) - u(x, t)| < \epsilon/3$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Por otro lado, como  $u_N(x, t)$  es continua, existe  $\delta > 0$  tal que  $|u_N(y, t) - u_N(x, t)| < \epsilon/3$  si  $|y - x| < \delta$ . Si podemos en común todas estas desigualdades, cuando  $|y - x| < \delta$  tenemos:

$$\begin{aligned} |u(y, t) - u(x, t)| &\leq |u(y, t) - u_N(y, t)| + |u_N(y, t) - u_N(x, t)| + |u_N(x, t) - u(x, t)| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon. \end{aligned}$$

lo que prueba que  $u(x, t)$  es continua en el punto  $x$ .

Ahora, sea  $T$  positivo tomemos:

$C([0, T] : B)$  el conjunto de todas las funciones continuas definidas en el intervalo  $0 \leq t \leq T$  que toman valores en el espacio de Banach  $B$ .

Así, para cada  $t \in [0, T]$  asociamos una función continua y acotada  $u(x, t)$  con  $x \in \mathbb{R}$ , ( $t$  fijo) que es un elemento del espacio de Banach  $B$ , es decir, sea  $\varphi \in C([0, T] : B)$ , entonces:

$$\begin{aligned} \varphi : [0, T] &\longrightarrow B \\ t &\longmapsto u(\cdot, t) \end{aligned}$$

donde  $\varphi$  es una función continua, es decir, por definición de continuidad, la función  $\varphi$  es continua en un punto  $t_0$  si  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que

$$\|\varphi(t) - \varphi(t_0)\|_B = \|u(\cdot, t) - u(\cdot, t_0)\|_B < \epsilon, \quad \text{si } |t - t_0| < \delta, t \in [0, T] \quad (4.14)$$

El espacio  $C([0, T] : B)$  es un espacio de Banach en sí mismo si definimos en él la norma:

$$\|u\| = \sup_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_B. \quad (4.15)$$

Esto es, como la función  $u(\cdot, t)$  para cada  $t$  fijo tiene norma en  $B$  y  $t \in [0, T]$ , tenemos una norma en  $B$  para cada  $t$  en ese intervalo. Así, definimos el supremo de todas estas normas cuya existencia se da porque  $\varphi([0, T])$  es un conjunto acotado (La imagen por una función continua de un espacio compacto, en nuestro caso  $[0, T]$ , es un espacio compacto, es decir, es un espacio cerrado y acotado).

Probemos entonces que si  $u \in C([0, T] : B)$ ,  $\|u\| = \sup_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_B$  es una norma, para ello demostremos las propiedades que definen una norma (ver Apéndice (F)).

- $\|u\| \geq 0$  pues  $\|u(\cdot, t)\|_B \geq 0$  ya que B es un espacio normado. Además, por definición del supremo tenemos que:  $\sup_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_B \geq 0$ .
- $\|u\| = 0$  si y solo si  $u = 0$ :  
 si  $\|u\| = 0$ , se tiene que  $\|u\| = \sup_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_B = 0$ , además,  $0 \leq \|u(\cdot, t)\|_B \leq \sup_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_B = 0$ , así  $\|u(\cdot, t)\|_B = 0$  y como B es un espacio normado (por ser un espacio de Banach), se tiene que  $u(\cdot, t) = 0$  para todo  $t \in [0, T]$ .  
 Por otro lado, si  $u = 0$  como B es un espacio normado, se tiene que  $\|u(\cdot, t)\|_B = 0$  para todo  $t \in [0, T]$  y, por lo tanto,  $\sup_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_B = 0$ , de donde  $\|u\| = 0$ .
- Veamos ahora que, dado  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ . Por definición de la norma en  $C([0, T] : B)$  tenemos que,  $\|\lambda u\| = \sup_{t \in [0, T]} \|\lambda u(\cdot, t)\|_B$ , como B es un espacio normado y teniendo en cuenta las propiedades del supremo:
 
$$\sup_{t \in [0, T]} \|\lambda u(\cdot, t)\|_B = \sup_{t \in [0, T]} |\lambda| \|u(\cdot, t)\|_B = |\lambda| \sup_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_B = |\lambda| \|u\|.$$
- Por último, veamos que se cumple la desigualdad triangular en la norma definida en  $C([0, T] : B)$ . Sean  $u, v \in C([0, T] : B)$ :

$$\begin{aligned} \|u + v\| &= \sup_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t) + v(\cdot, t)\|_B \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} (\|u(\cdot, t)\|_B + \|v(\cdot, t)\|_B) \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_B + \sup_{t \in [0, T]} \|v(\cdot, t)\|_B \\ &\leq \|u\| + \|v\|. \end{aligned}$$

De esta manera, hemos demostrado que efectivamente (4.15) es una norma en  $C([0, T] : B)$ .

Además, es necesario mostrar que si B es un espacio de Banach,  $C([0, T] : B)$  también lo es, es decir, que toda sucesión de Cauchy contenida en  $C([0, T] : B)$  converge a un elemento de  $C([0, T] : B)$ .

Sea  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy en  $C([0, T] : B)$ , entonces:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ positivo, tal que } \|u_n - u_m\| < \epsilon, \quad \forall n, m > N$$

Por definición de  $\|\cdot\|$  (4.15), tenemos la siguiente desigualdad:

$$\|u_n(\cdot, t) - u_m(\cdot, t)\|_B \leq \|u_n - u_m\| \leq \epsilon, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.16)$$

Por lo que  $\{u_n(\cdot, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en B para un  $t$  fijo,  $t \in [0, T]$  y, como B es un espacio de Banach, es convergente, es decir,  $\exists g_t(\cdot) \in B$  tal que

$$\|u_n(\cdot, t) - g_t(\cdot)\|_B \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Definamos ahora  $u : [0, T] \rightarrow B$  tal que:

$$u(\cdot, t) = g_t(\cdot),$$

donde  $g_t(\cdot)$  es la función definida anteriormente. Si demostramos que  $\|u_n - u\| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y que  $u : [0, T] \rightarrow B$  es continua (pertenecer a  $C([0, T] : B)$ ), acabaremos la demostración de que el espacio normado  $C([0, T] : B)$  es un espacio de Banach.

Por lo tanto, veamos, en primer lugar, que  $u$  (definida en el intervalo  $t \in [0, T]$ ) es una función continua. Por definición de continuidad en  $C([0, T] : B)$  (4.14) tenemos que  $u$  es continua en un punto  $t_0$  de este espacio si, dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que:

$$\|u(\cdot, t) - u(\cdot, t_0)\|_B < \epsilon, \text{ si } |t - t_0| < \delta, t \in [0, T].$$

Demostremos esto, por la propiedad de la desigualdad triangular tenemos:

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t) - u(\cdot, t_0)\|_B &= \|u(\cdot, t) - u_n(\cdot, t) + u_n(\cdot, t) - u_n(\cdot, t_0) + u_n(\cdot, t_0) - u(\cdot, t_0)\|_B \\ &\leq \|u(\cdot, t) - u_n(\cdot, t)\|_B + \|u_n(\cdot, t) - u_n(\cdot, t_0)\|_B + \|u_n(\cdot, t_0) - u(\cdot, t_0)\|_B. \end{aligned}$$

Ahora, tenemos:

$$\|u(\cdot, t) - u_n(\cdot, t)\|_B < \frac{\epsilon}{3}, \quad (4.17)$$

cuando  $n > n_1$ . Esto se debe a que la función  $u_n(\cdot, t)$  converge en B para  $t$  fijo. Por otro lado, por definición de continuidad en  $C([0, T]; B)$  (4.14) existe  $\delta > |t - t_0|$ :

$$\|u_n(\cdot, t) - u_n(\cdot, t_0)\|_B < \frac{\epsilon}{3}. \quad (4.18)$$

Por último,

$$\|u(\cdot, t_0) - u_n(\cdot, t_0)\|_B < \frac{\epsilon}{3}. \quad (4.19)$$

cuando  $n > n_2$  debido a que la función  $u_n(\cdot, t_0)$  converge  $u(\cdot, t_0)$  en B para  $t_0$  fijo. Por lo tanto, juntando las desigualdades (4.17), (4.18) y (4.19) tenemos:

$$\|u(\cdot, t) - u(\cdot, t_0)\|_B < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Con lo que hemos demostrado que  $u(\cdot, t)$  es una función continua en  $C([0, T]; B)$ .

Por lo tanto, tan solo nos queda demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0$ . De la desigualdad (4.16) tenemos:

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_n(\cdot, t) - u_m(\cdot, t)\|_B < \epsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Tomando el límite cuando  $m \rightarrow \infty$ , como la sucesión  $\{u_m(\cdot, t)\}$  converge a  $u(\cdot, t)$  en B:

$$\sup_{n \geq N} \sup_{t \in [0, T]} \|u_n(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_B < \epsilon.$$

de donde:

$$\sup_{n \geq N} \|u_n - u\| < \epsilon.$$

tal y como queríamos demostrar.

Ahora, antes de enunciar y demostrar el teorema de existencia local de solución, introducimos la operación de convolución siguiente:

$$(K * u)(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) u(y, t) dy$$

donde  $\Phi(x, t)$  es la función Gaussiana (ver definición (3.1)) y  $u(x, t) \in B$  con  $x \in \mathbb{R}, t > 0$  fijo.  $(\Phi * u)(x, t)$  es la convolución de  $\Phi$  con  $u$  y  $(\Phi * u)(\cdot, t)$  pertenece al espacio de Banach B. Veámoslo:

Veamos que la norma de la convolución en B (definida en (4.15)) es finita, es decir,  $\|(\Phi * u)(\cdot, t)\|_B < \infty$ :

$$\begin{aligned} \|(\Phi * u)(\cdot, t)\|_B &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) u(y, t) dy \right| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\Phi(x - y, t) u(y, t)| dy \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\Phi(x - y, t)| \|u(y, t)\|_B dy \end{aligned}$$

de donde la última desigualdad viene de la definición de la norma definida en el espacio de Banach B. Además, dicha norma es finita por ser  $u(y, t)$  una función continua y acotada de manera que, recordando por otro lado las propiedades de la función Gaussiana (3.1) y el lema (3.2), tenemos:

$$\begin{aligned} \|(\Phi * u)(\cdot, t)\|_B &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\Phi(x - y, t)| \|u(y, t)\|_B dy \\ &= \|u(\cdot, t)\|_B \int_{\mathbb{R}} |\Phi(x - y, t)| dy \\ &= \|u(\cdot, t)\|_B \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) dy \\ &= \|u(\cdot, t)\|_B < \infty. \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde, tal y como hemos mencionado anteriormente,  $\|u(\cdot, t)\|_B$  es finita.

Así, estamos ahora en condiciones de enunciar el teorema de existencia local de solución extraído del libro de Logan [20, pág.304].

**Teorema 4.2** (Existencia Local). *Consideremos el problema con una condición inicial (4.9) donde  $u_0 \in B$  y la función  $f$  satisface las siguientes condiciones:*

- (1)  $f \in C^1(\mathbb{R})$ .
- (2)  $f(0) = 0$  y para cada  $t$  fijo en  $[0, T]$ ,  $f(u(\cdot, t)) \in B$  para cada  $u(\cdot, t) \in B$ .
- (3) Dado cualquier  $M > 0$ , existe una constante  $k$ , que depende de  $M$ , tal que

$$\|f(u(\cdot, t)) - f(v(\cdot, t))\|_B \leq k\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_B,$$

para todo  $t \in [0, T]$  y todo  $u(\cdot, t), v(\cdot, t) \in B$  con  $\|u(\cdot, t)\|_B \leq M$  y  $\|v(\cdot, t)\|_B \leq M$ .

Entonces, bajo estas condiciones, existe  $t_0 > 0$ , donde  $t_0$  depende solamente de  $f$  y  $\|u_0(\cdot)\|_B$ , tal que el problema con una condición inicial (4.9) tiene una única solución en  $C([0, t_0], B)$ , y  $\|u\| \leq 2\|u_0(\cdot)\|$ .

*Demostración:* Procedemos a demostrar el teorema de existencia local. Para ello, vamos a comenzar definiendo un subconjunto cerrado del espacio de Banach  $C([0, t_0]; B)$  y mostrando que la aplicación

$$\begin{aligned} \phi(u)(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t - s) f(u(y, s)) dy ds. \end{aligned} \quad (4.21)$$

es una aplicación contractiva (Recordemos que al comienzo de la sección buscábamos resolver la ecuación (4.11) encontrando un punto fijo para la aplicación que acabamos de definir). A continuación, utilizaremos el Teorema del Punto Fijo de Banach en el subconjunto cerrado  $G$  (ver Apéndice (F)) de manera que podamos encontrar una solución a nuestro problema (4.9) de la forma  $\phi(u) = u$  que, tal y como veíamos en el teorema (4.1), es una solución del problema.

Así, comenzamos definiendo el subconjunto  $G$ :

$$G = \{u \in C([0, T], B) : \|u(\cdot, t) - (\Phi * u_0)(\cdot, t)\|_B \leq \|u_0(\cdot)\|_B, \quad 0 \leq t \leq t_0\},$$

donde  $t_0 = 1/2k$  ( $k$  constante definida en las condiciones del teorema). El conjunto  $G$  es cerrado y no vacío (el cero está en  $G$ ). Teniendo en cuenta la definición del subconjunto  $G$ , la desigualdad triangular y el hecho de que:

$$\|(\Phi * u)\|_B \leq \|u\|_B, \quad (4.22)$$

que hemos demostrado en (4.20), tenemos que:

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_B &= \|u(\cdot, t) - (\Phi * u_0)(\cdot, t)\|_B + \|(\Phi * u_0)(\cdot, t)\|_B \\ &\leq \|u_0(\cdot)\|_B + \|u_0(\cdot)\|_B \\ &\leq 2\|u_0(\cdot)\|_B, \end{aligned} \quad (4.23)$$

para  $0 \leq t \leq t_0$ , donde la penúltima desigualdad viene de (4.22) tomando  $t=0$ . Ahora, si en (4.23) tomamos el supremo en  $t$  ( $t \in [0, t_0]$ ) a ambos lados de la desigualdad tenemos:

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_B \leq 2\|u_0(\cdot)\|_B \implies \|u\| \leq 2\|u_0(\cdot)\|_B \quad (4.24)$$

Esto prueba la última afirmación del teorema. Ahora, por la condición (2) del teorema (4.2) y por la definición de la norma en  $C([0, t_0]; B)$  (4.15), tenemos que para cualquier  $0 \leq t \leq t_0$ :

$$\|f(u(\cdot, t)) - f(v(\cdot, t))\|_B \leq k\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_B \leq k\|u - v\|.$$

Debido a que  $k$  depende solamente del supremo de  $u$  y  $v$  (por la condición (2) del teorema (4.2)), y por supuesto de  $f$ , está claro que  $t_0$  depende solamente de  $f$  y del supremo de la norma de  $u_0$ , en virtud de la desigualdad (4.24).

Demostremos ahora que  $\phi$  es una aplicación contractiva en el subconjunto  $G$  del espacio de Banach  $C([0, T]; B)$  (ver definición en el Apéndice (F)). En primer lugar, veamos que  $\phi$  es una aplicación que lleva el subconjunto  $G$  a sí mismo (es decir, que  $\phi(u) \in G$  si  $u \in G$ ). Dicha prueba se sigue de las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
\|\phi(u)(\cdot, t) - ((\Phi * u_0)(\cdot, t))\|_B &= \left\| \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) f(u(y, s)) dy ds - \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy \right\|_B \\
&= \left\| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) f(u(y, s)) dy ds \right\|_B \\
&= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) f(u(y, s)) dy ds \right| \\
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) |f(u(y, s))| dy ds \\
&\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) \|f(u(\cdot, s))\|_B dy ds \\
&= \int_0^t \|f(u(\cdot, s))\|_B ds \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) dy = \int_0^t \|f(u(\cdot, s))\|_B ds,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se da tomando  $s$  fijo. Ahora, como suponemos que  $u \in G$ , utilizando la desigualdad (4.23) y debido a que la función  $f$  satisface las condiciones (2) y (3) del teorema (4.2) tenemos:

$$\begin{aligned}
\|\phi(u)(\cdot, t) - ((\Phi * u_0)(\cdot, t))\|_B &\leq \int_0^t \|f(u(\cdot, s))\|_B ds \\
&\leq \int_0^t k \|u(\cdot, s)\|_B ds \\
&\leq \int_0^t 2k \|u_0(\cdot)\|_B ds \\
&= 2kt \|u_0(\cdot)\|_B < \|u_0\|_B,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se da porque  $0 \leq t \leq t_0 = 1/2k$ . Por lo tanto,  $\phi(u) \in G$  y  $\phi$  es una aplicación que lleva  $G$  en  $G$ .

Ahora, veamos que  $\phi$  cumple la propiedad de que, dados  $u, v \in G$  que cumplen la misma condición inicial  $u_0$ , para alguna constante  $0 < \alpha < 1$  se cumple que  $\|\phi(u(\cdot, t)) - \phi(v(\cdot, t))\|_B \leq \alpha \|u - v\|_B$  (donde  $t \in [0, t_0]$ ). Esta propiedad se sigue, razonando de manera similar a la prueba anterior, de las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
\|\phi(u)(\cdot, t) - \phi(v)(\cdot, t)\|_B &= \left\| \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) [u_0(y) - u_0(y)] dy + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) [f(u(y, s)) - f(v(y, s))] dy ds \right\|_B \\
&= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) [f(u(y, s)) - f(v(y, s))] dy ds \right| \\
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) |f(u(y, s)) - f(v(y, s))| dy ds \\
&\leq \int_0^t \|f(u(\cdot, s)) - f(v(\cdot, s))\|_B ds \\
&\leq \int_0^t k \|u - v\|_B ds = kt \|u - v\|_B \leq kt_0 \|u - v\|_B = \frac{\|u - v\|_B}{2}.
\end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre  $t \in [0, T]$  tenemos:

$$\|\phi(u)(\cdot, t) - \phi(v)(\cdot, t)\| \leq \frac{\|u - v\|}{2}. \quad (4.25)$$

Por lo tanto,  $\phi$  es efectivamente una aplicación contractiva en el subconjunto  $G$  del espacio de Banach  $C([0, T]; B)$ . Utilizando el Teorema del Punto fijo de Banach (E.1) para subconjuntos cerrados de un espacio de Banach tenemos que  $\phi$  tiene un único punto fijo en  $G$ , es decir, siguiendo el teorema (4.1), una única solución para el problema con una condición inicial (4.9) en  $G$ .

Finalmente, solo nos queda verificar que no existen soluciones fuera del subconjunto cerrado  $G$ . Sean  $u$  y  $v$  dos soluciones en  $C([0, T]; B)$  que satisfacen la misma condición inicial entonces:

$$\begin{aligned} \phi(u)(x, t) - \phi(v)(x, t) &= u(x, t) - v(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) [u_0(y) - v_0(y)] dy + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) [f(u(y, s)) - f(v(y, s))] dy ds \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Phi(x - y, t) [f(u(y, s)) - f(v(y, s))] dy ds, \end{aligned}$$

de donde se sigue fácilmente, tomando el supremo en  $x \in \mathbb{R}$  a ambos lados de la igualdad y razonando análogamente a la prueba de que  $\phi$  es una aplicación contractiva, que:

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_B \leq k \int_0^t \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|_B ds,$$

donde  $t \in [0, T]$ . Ahora, tomando

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|_B ds. \\ h'(t) &= \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_B. \end{aligned}$$

tenemos:

$$h'(t) \leq kh(t) \Rightarrow h'(t) - kh(t) \leq 0.$$

multiplicando por  $e^{-kt}$  tenemos:

$$\begin{aligned} e^{-kt} h'(t) - e^{-kt} kh(t) &\leq 0. \\ \frac{d}{dt} \{e^{-kt} h(t)\} &\leq 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \{e^{-kt} \int_0^t \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|_B ds\} \leq 0. \end{aligned}$$

de donde se sigue que la función  $e^{-kt} h(t)$  es decreciente, es decir,  $e^{-kt} h(t) \leq e^{-k \cdot 0} h(0) = h(0) = 0$  y:

$$h(0) = 0 \Rightarrow \int_0^t \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|_B ds = 0 \Rightarrow \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|_B = 0 \Rightarrow u(\cdot, t) = v(\cdot, t).$$

donde  $t \in [0, T]$ . De esta manera, queda demostrado el teorema.  $\square$

Así, una vez estudiadas las condiciones para la existencia de solución local para ecuaciones de difusión-reacción con una condición inicial, volvemos al estudio de la ecuación de Fisher-KPP, con el objetivo de verificar que esta ecuación cumple, efectivamente, las condiciones del teorema (4.2).

Por lo tanto, consideremos el problema de una condición inicial para la ecuación de Fisher-KPP:

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= u(1 - u), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aquí,  $f(u) = u(1 - u)$ . Claramente  $f \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $f(0) = 0$  y

$$\|f(u(\cdot, t) - f(v(\cdot, t))\|_B = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(u(x, t)) - f(v(x, t))| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |(u - v)(1 - u - v)| \leq k \sup_{x \in \mathbb{R}} |(u - v)|.$$

donde  $k = 1 + \sup_{x \in \mathbb{R}} |u| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |v|$ . Por lo tanto, se satisface la ecuación de Lipschitz local (condición (2) del teorema (4.2)). Además, si  $u(\cdot, t) \in B$  también lo está  $f(u(\cdot, t))$ . De esta manera, la función  $f(u)$  satisface las condiciones

del teorema de existencia local y podemos garantizar que existe una solución para el problema con una condición inicial para la ecuación de Fisher-KPP en un intervalo  $[0, t_0]$ , para algún  $t_0$  positivo.

Por otro lado, sabemos que el teorema de existencia local (Teorema (4.2)) garantiza una solución local para  $0 \leq t \leq t_0$ , para algún  $t_0$  positivo. Bajo ciertas condiciones podemos extender la solución para cualquier tiempo finito  $T$  mediante el siguiente resultado:

**Teorema 4.3** (Existencia Global). *Bajo la mismas hipótesis del teorema de existencia local (4.2) asumamos, además, que existe una constante  $C$  que depende solo de  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |u_0|$  tal que si  $u$  es alguna solución del problema (4.9) en  $0 \leq t \leq T$ , entonces  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t)| \leq C$ . Entonces la solución de (4.9) existe para todo  $t$  en  $[0, T]$  y  $u(x, t) \in B$ . Aquí  $T$  puede ser infinito, dando una existencia global.*

Aunque sería interesante demostrar este teorema de existencia global, no lo haremos en este trabajo por falta de espacio. Sin embargo, si el lector tiene interés en su demostración puede encontrarla en el libro de Logan [20, pág:307]



---

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] I.G. Petrovsky A.N. Kolmogorov y N.S. Piskunov. “Etude de l’équation de la diffusion avec  $\lambda$  croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique”. En: *Bull. Univ. Etat Moscou. Ser. A: Math. Mech* 1 (1937), págs. 1-16.
- [2] Larry C Andrews. *Special functions of mathematics for engineers*. Vol. 49. Spie Press, 1998.
- [3] Donald G Aronson y Hans F Weinberger. “Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics”. En: *Advances in Mathematics* 30.1 (1978), págs. 33-76. DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(78\)90130-5](https://doi.org/10.1016/0001-8708(78)90130-5).
- [4] Garrett Birkhoff y Gian-Carlo Rota. *Ordinary differential equations*. John Wiley & Sons, 1978.
- [5] Fred Brauer, Carlos Castillo-Chavez y Carlos Castillo-Chavez. *Mathematical models in population biology and epidemiology*. Vol. 2. Springer, 2012.
- [6] Alberto Bressan. “Lecture Notes on Functional Analysis”. En: *Graduate Studies in Mathematics* 143 (2012).
- [7] Andrew Browder. *Mathematical analysis: an introduction*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [8] Robert Brown. *A brief account of microscopical observations made... on the particles contained in the pollen of plants, and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies*. 1828.
- [9] Lawrence C.Evans. *Partial differential equations*. Vol. 19. American Mathematical Society, 1998.
- [10] John Crank. *The mathematics of diffusion*. Oxford university press, 1979.
- [11] A Einstein. “On the movement of small particles suspended in stationary liquids required by the molecular-kinetic theory of heat”. En: *Ann. d. Phys* 17.549-560 (1905), pág. 1. URL: <https://www2.stat.duke.edu/courses/Spring12/sta357/refs/Eins1905EN.pdf>.
- [12] J.A. Facenda Aguirre y F.J. Freniche Ibañez. *Integración de funciones de varias variables*. Ediciones Pirámide (Grupo Anaya S.A.), 2002.
- [13] L.A. Fernández. *Lecture notes (Apuntes del grado en la asignatura Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales de 2º curso)*.
- [14] Gerald B Folland. *Fourier analysis and its applications*. Vol. 4. American Mathematical Soc., 2009.
- [15] Gerald B Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*. Vol. 40. John Wiley & Sons, 1999.
- [16] D.Gómez Gandarillas. *Lecture notes (Apuntes del grado en la asignatura Teoría Cualitativa de EDO de 4º curso)*.
- [17] J.Vinuesa. *Lecture notes (Apuntes del grado en la asignatura Variable Compleja de 3º curso)*.
- [18] Fritz John. *Partial differential equations*. 4.ª ed. Springer-Verlag, 1982.
- [19] *Lecture notes (Apuntes de la Universidad de Pennsylvania)*. URL: <https://www2.math.upenn.edu/~kazdan/508F10/convolution-L.pdf>.

- [20] J David Logan. *An introduction to nonlinear partial differential equations*. Vol. 89. John Wiley & Sons, 2008.
- [21] James D Murray. *Mathematical biology: I. An introduction*. Vol. 17. Springer Science & Business Media, 2007.
- [22] A. Larotonda N.A. Fava G. Keilhauer. “Surface Integrals, Spherical Coordinates and the Area Element of  $S^{n-1}$ ”. En: *Revista de la U.M.A* 30 (1981-1982), págs. 77-84.
- [23] Thiruppudaimarudhur N Narasimhan. “Fourier’s heat conduction equation: History, influence, and connections”. En: *Reviews of Geophysics* 37.1 (1999), págs. 151-172. DOI: <https://doi.org/10.1029/1998RG900006>.
- [24] Brad G Osgood. *Lectures on the Fourier transform and its applications*. Vol. 33. American Mathematical Soc., 2019.
- [25] Walter A Strauss. *Partial differential equations: An introduction*. John Wiley & Sons, 2007.
- [26] Alan J Weir. *Lebesgue integration and measure*. Vol. 1. Cambridge University Press, 1973.

---

# APÉNDICE A

---

## OTROS RESULTADOS

Sea  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida, sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $f : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que para cada  $t \in I$  asocia, a cada  $x \in X$ ,  $f(x, t)$  integrable en  $X$ . Estas suposiciones permiten considerar la función  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x),$$

que es una función definida por una integral dependiente del parámetro  $t$ . Ver libro de Facenda y Freniche [12, pág:108].

**Teorema A.1** (Regla de Leibniz de derivación bajo el signo integral). [12, pág:108] Si

1 En casi todo  $X$  existe  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ , para todo  $t \in I$ .

2 Existe una función  $g$  integrable en  $X$  tal que

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right\| \leq g(x),$$

en casi todo  $X$ , para todo  $t \in I$ .

Entonces  $F$  es derivable en  $I$  y se cumple:

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x).$$

En el capítulo 3, hemos visto que utilizamos esta regla en la demostración del teorema (3.3) a la hora de justificar la derivación bajo el signo integral. A continuación, vamos a demostrar que efectivamente la función

$$f(y, t) = \Phi(x - y, t)g(y).$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$  fijo, cumple las condiciones de la Regla de Leibniz, de manera que podamos justificar que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x - y, t)g(y)dy.$$

En primer lugar, es inmediato ver que existe la derivada  $\frac{\partial}{\partial t}(f(x, t))$  en  $\mathbb{R}^n$  ya que  $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ .

Por lo tanto, sólo nos queda demostrar la segunda condición de esta regla. Tomando  $x \in \mathbb{R}^n, t \in [\delta, \infty)$  tenemos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial t}(\Phi(x - y, t)g(y)) \right| &= \left| \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \right) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{t^{n/2+1}} \left( \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \right) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \right| + \left| \frac{1}{t^{n/2}} \left( \frac{|x-y|^2}{4t^2} \right) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\delta^{n/2+1}} \left( \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \right) \cdot 1 \cdot g(y) \right| + \left| \frac{1}{\delta^{n/2}} \frac{1}{t} \left( \frac{|x-y|^2}{4t} \right) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \right|. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Ahora, si tenemos en cuenta la siguiente desigualdad:

$$ze^{-z} \leq 2e^{-z/2} \Leftrightarrow z \leq 2e^{z/2}, \quad (\forall z \geq 0). \quad (\text{A.2})$$

la cual demostramos mediante el estudio de la monotonía de la función  $h(z) = 2e^{z/2} - z$ :

$$h'(z) = e^{\frac{z}{2}} - 1 \geq 0.$$

La derivada de  $h(z)$  es siempre positiva debido a que la función exponencial con exponente positivo es siempre una función mayor o igual que 1. Por lo tanto,  $h(z)$  es estrictamente creciente y se cumple la desigualdad (A.2). Así, volviendo a (A.1) podemos acotar, teniendo en cuenta que la función exponencial es menor o igual que 1 cuando su exponente es negativo, la función:

$$\left( \frac{|x-y|^2}{4t} \right) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \leq 2e^{-\frac{|x-y|^2}{8t}} \leq 2.$$

De manera que la desigualdad (A.1) nos queda:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial t} (\Phi(x-y, t)g(y)) \right| &\leq \left| \frac{1}{\delta^{n/2+1}} \left( \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \right) \cdot 1 \cdot g(y) \right| + \left| \frac{1}{\delta^{n/2}} \frac{1}{\delta} \left( \frac{|x-y|^2}{4t} \right) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \right| \\ &\leq \frac{1}{\delta^{n/2+1}} \left( \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \right) |g(y)| + \frac{1}{\delta^{n/2+1}} 2|g(y)| \\ &= |g(y)| \left[ \frac{n}{2\delta^{n/2+1}(4\pi)^{n/2}} + \frac{2}{\delta^{n/2+1}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Por lo que hemos acotado la función  $\left| \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \right|$  por una función integrable ( $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ), luego su módulo es integrable en  $\mathbb{R}^n$ , ver teorema (3.3) y podemos concluir que se cumple la segunda y última condición de la regla de Leibniz (A.1).

Análogamente podemos justificar que:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x-y, t)g(y)dy.$$

La existencia de la derivada  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} (f(x, t))$  es inmediata debido a que  $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ . Por otro lado, razonando de manera similar a las desigualdades (A.1) y (A.2) tenemos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Phi(x-y, t)g(y)) \right| &= \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \right) \right| \\ &\leq \left| \left( \frac{|x-y|^2}{4(4\pi)^{n/2} t^{n/2+2}} \right) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \right| + \left| \left( \frac{1}{2(4\pi)^{n/2} t^{n/2+1}} \right) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \right| \\ &= \left| \left( \frac{1}{(4\pi)^{n/2} t^{n/2+1}} \right) \left( \frac{|x-y|^2}{4t} \right) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \right| + \left| \left( \frac{1}{2(4\pi)^{n/2} t^{n/2+1}} \right) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \right| \\ &\leq |g(y)| \left[ \frac{2}{(4\pi)^{n/2} \delta^{n/2+1}} - \frac{1}{2(4\pi)^{n/2} \delta^{n/2+1}} \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos acotado la función  $\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) \right|$  por una función integrable, luego se cumplen las condiciones necesarias de la regla de Leibniz (A.1).

Ahora, en la demostración del teorema (3.4) del capítulo 3, utilizamos la regla de Leibniz para justificar la derivación bajo el signo integral:

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f(x-y, t-s) dy ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f_t(x-y, t-s) dy ds.$$

Por lo que debemos ver que la función:

$$g(x, t) = \Phi(y, s) f(x-y, t-s),$$

cumple las condiciones para poder utilizar dicha regla (A.1). En primer lugar, existe  $\frac{\partial}{\partial t}g(x, t)$  debido a que  $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ .

Por otro lado, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial t} \Phi(y, s) f(x - y, t - s) \right| &= |\Phi(y, s) f_t(x - y, t - s)| \\ &\leq \Phi(y, s) |f_t(x - y, t - s)| \leq M \Phi(y, s) \quad (x \text{ fijo}, y \in \mathbb{R}^n, t, s > 0). \end{aligned}$$

de donde la última desigualdad viene de que, si recordamos como definíamos la función  $f$  en el teorema (3.4),  $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  y tiene soporte compacto, por tanto, al ser la derivada de  $f$  respecto de  $t$  continua y con soporte compacto,  $f_t(x - y, t - s)$  tiene un máximo ( $f_t(x - y, t - s) \leq M$ ). Además, la función  $\Phi(y, s)$  es integrable ya que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) dy = 1.$$

Por lo que la función  $g(x, t)$  cumple las condiciones necesarias del teorema (A.1). Análogamente se puede proceder para demostrar:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f(x - y, t - s) dy ds = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} f(x - y, t - s) dy ds.$$

Por último, introduzcamos un teorema más general de derivación bajo el signo integral, ver libro de Facenda y Freniche [12, pág:101]:

**Teorema A.2** (Regla general de derivación bajo el signo integral). *Sea  $f(t, s)$  una función continua y tal que  $f(t, s) \in C^\infty$  (es decir, todas sus derivadas existen y son continuas) y sean los límites de integración  $a(t)$  y  $b(t)$  funciones continuas y continuamente diferenciables, entonces:*

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, s) ds = f(t, b(t)) b'(t) - f(t, a(t)) a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{d}{dt} f(t, s) dt.$$

Además, nos servirá de utilidad el siguiente resultado: [26, pág:83]

**Teorema A.3** (Teorema de Fubini). *Sea  $f(x, y)$  continua en  $A \times B$  tal que*

$$\int_{A \times B} |f(x, y)| dx dy < \infty,$$

*entonces la integral respecto al producto cartesiano de los espacios  $X$  e  $Y$  verifica:*

$$\int_{A \times B} f(x, y) dx dy = \int_A \left( \int_B f(x, y) dy \right) dx = \int_B \left( \int_A f(x, y) dx \right) dy.$$

Si recordamos la fórmula (3.31) del capítulo 3, usábamos el Teorema de Fubini para desarrollar la primera integral. Así, probemos que se cumplen las condiciones del teorema (A.3) para la integral:

$$\int_{\mathbb{R}^n \times [\epsilon, t]} \Phi(y, s) \left( -\frac{\partial}{\partial s} f(x - y, t - s) \right) dy ds.$$

donde  $x, y \in \mathbb{R}^n, t, s > 0$ .

Como  $\frac{\partial}{\partial s} f(x - y, t - s)$  es una función continua de soporte compacto en  $\mathbb{R}^n \times [t, \epsilon]$  (recordemos la definición de  $f$  del teorema (3.4)), es integrable. Además,  $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ .

Así,  $\Phi(y, s) \left( -\frac{\partial}{\partial s} f(x - y, t - s) \right)$  es continua de soporte compacto y, por lo tanto, es integrable, es decir, se cumple:

$$\int_{\mathbb{R}^n \times [\epsilon, t]} \left| \Phi(y, s) - \frac{\partial}{\partial s} f(x - y, t - s) \right| dy ds < \infty.$$

### Integración por partes en $\mathbb{R}^n$ .

En la demostración del teorema (3.4) del capítulo 3, a la hora de desarrollar el segundo sumando de la integral  $I_\epsilon$  (ecuación (3.31)) hemos utilizado la integración por partes en  $\mathbb{R}^n$ . Introduzcamos la fórmula para la integración por partes en subconjuntos abiertos y acotados de  $\mathbb{R}^n$  (véase apéndice C de Evans [9, thm.2, pag.628])

**Teorema A.4** (Fórmula de integración por partes). *Sea  $U$  un subconjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\partial U \in C^1$  su frontera. Sean  $u, v \in C^2(\bar{U})$ . Entonces:*

$$\int_U \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u \right) v dx = - \int_U u \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} v \right) dx + \int_{\partial U} u v \nu_i dx, \quad (i = 1 \dots n).$$

donde  $\nu$  es el campo de vectores normales unitarios que apuntan hacia el exterior de la superficie y  $\nu_i$  es su  $i$ -ésima componente.

En nuestro caso del capítulo 3, queremos integrar por partes:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) (-\Delta_y f(x - y, t - s)) dy ds.$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  fijo,  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ ,  $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ . Si tomamos como  $U = B_R(0)$  con  $R \in \mathbb{R}^n$  tenemos que:

$$\int_U \Phi(y, s) (-\Delta_y f(x - y, t - s)) dy ds = \int_U (-\Delta_y \Phi(y, s)) f(x - y, t - s) dy ds + \int_{\partial U} \Phi(y, s) f(x - y, t - s) \nu dy ds.$$

Como la función  $f$  tiene soporte compacto (ver teorema (3.4)) si hacemos que  $R \rightarrow \infty$ , de manera que el subconjunto  $U$  sea lo suficientemente grande como para cubrir todo  $\mathbb{R}^n$ , la integral en la frontera de  $U$  será nula para ese  $R$  suficientemente grande, puesto que fuera del soporte de  $f$ , la función  $f$  es cero. Así, nos queda:

$$\int_U \Phi(y, s) (-\Delta_y f(x - y, t - s)) dy ds = \int_U (-\Delta_y \Phi(y, s)) f(x - y, t - s) dy ds.$$

cuando  $R \rightarrow \infty$ .

### Convergencia de una serie de potencias.

En el ejemplo de Tichonov del capítulo 3 (página 32) decíamos que la función  $u(x, t)$  definida en (3.40) como una serie de potencias, es continua para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$ . Para ello, debemos demostrar que es una serie uniformemente convergente. Introduzcamos el siguiente resultado extraído del libro de Andrews [2, tma.1.1, pag.25]:

**Teorema A.5.** *Sea*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n.$$

*una serie de potencias con radio de convergencia  $R$ ,  $0 \leq R \leq \infty$ . Entonces, la serie de potencias converge absolutamente para  $|x - a| < R$  y diverge para  $|x - a| > R$ . Además, si  $R > 0$ , para cada  $\rho$  tal que  $0 \leq \rho < R$  la serie converge uniformemente en  $|x - a| \leq \rho$ .*

Calculemos el radio de convergencia de nuestra serie de potencias:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}.$$

mediante el criterio del Cociente donde  $a_k = g^{(k)}(t)/(2k)!$ :

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g^{(k+1)}(t)/(2k+1)!}{g^{(k)}(t)/(2k)!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{2k+1} = 0.$$

Por tanto, el radio de convergencia de la serie de potencias asociada a la función  $u(x, t)$  es  $R = 1/L = \infty$ . Así, la serie es uniformemente convergente para todo intervalo  $|x| \leq \rho$  donde  $0 \leq \rho < \infty$ .

---

---

# APÉNDICE B

---

## CONVOLUCIÓN

La idea de convolución de dos funciones está adquiriendo un uso más generalizado debido a su gran uso en varias ramas de la ciencia. Su término alemán *Faltung* se traduce como “producto de composición”, adaptado del francés. Términos que se pueden encontrar en campos como el Teorema de Borel, la integral de Duhamel, el término probabilístico correlación cruzada o covarianza.... Los siguientes resultados han sido extraídos de los apuntes del curso de ecuaciones en derivadas parciales [13], aunque se han adaptado los cálculos a  $n$  dimensiones.

**Definición B.1.** La convolución de dos funciones  $g(x)$  y  $f(x)$  se define como la función

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy,$$

para cada  $y \in \mathbb{R}^n$ . Se usa la notación

$$(g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy,$$

donde las funciones  $f$  y  $g$  están definidas en todo  $\mathbb{R}^n$

El producto de convolución de dos funciones no siempre está definido, tomemos por ejemplo  $f(x) = g(x) = 1$  para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  entonces:

$$(1 * 1)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} 1dy = +\infty.$$

El producto de convolución  $(f*g)(x)$  es finito para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  (al menos) en los siguientes casos:

- Si  $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx < +\infty$  y  $g$  es acotada (existe  $C \in \mathbb{R}$  tal que  $|g(x)| \leq C$  para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ ).

Bajo estas suposiciones se tiene que:

$$|(f * g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|dy \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|dy < +\infty.$$

- Si  $f$  es acotada (existe  $C \in \mathbb{R}$  tal que  $|f(x)| \leq C$  para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ ) y  $\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|dx < +\infty$ .

Se demuestra análogamente al caso anterior.

### B.1. Propiedades de la convolución

La convolución se comporta muy similarmente a la multiplicación, es por ello por lo que a veces hablamos para referirnos a la convolución de dos funciones como el producto de convolución de estas dos funciones.

Por ejemplo, se tiene que dadas tres funciones  $f$ ,  $g$  y  $h$  definidas en todo  $\mathbb{R}^n$  donde el producto de convolución entre ellas está bien definido, es decir, es finito y, por tanto, cumple las propiedades necesarias para que esto suceda, descritas anteriormente:

- La convolución es conmutativa, es decir

$$g * f = f * g.$$

Esta propiedad es muy fácil de probar mediante la definición de convolución:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-z)f(z)dz = (g * f)(x).$$

donde la segunda igualdad se da mediante el cambio de variable  $z = x - y$ .

- Se cumple también la propiedad asociativa

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

Si desarrollamos la expresión de la parte izquierda de la ecuación teniendo en cuenta la propiedad conmutativa tenemos:

$$((g * f) * h)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (g(x-y)f(y) * h(x))dy =$$

desarrollando la segunda convolución tenemos

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} (g(z-y)f(y))dy \right] h(x-z)dz =$$

Ahora, cambiando el orden de integración

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left[ \int_{\mathbb{R}^n} g(z-y)h(x-z)dz \right] dy =$$

Haciendo el cambio de variable  $u = z - y$  en la integral interior

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left[ \int_{\mathbb{R}^n} g(u)h(x-y-u)du \right] dy =$$

donde la integral interior es la convolución  $(g * h)(x-y)$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(g * h)(x-y)dy = (f * (g * h))(x).$$

Es necesario mencionar que el cambio del orden de integración se produce gracias al teorema de Fubini (A.3), el cual solo es aplicable cuando la integral doble es finita en valor absoluto, es decir, si:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |(g(y-x)f(x))h(t-y)|dy < \infty,$$

lo cual se cumple ya que hemos supuesto que los productos de convolución entre estas funciones son finitos.

- Propiedad distributiva respecto de la suma

$$f * (g + h) = f * g + f * h.$$

Probémoslo:

$$(f * (g+h))(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)(g(y)+h(y))dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)h(y)dy = (f * g)(x) + (f * h)(x).$$

### B.1.1. Derivada de una convolución

Si ahora hablamos del concepto de derivada de una convolución [24, pág:169]: si  $f$  es diferenciable, entonces  $f * g$  también lo es, aunque  $g$  no lo sea, y se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (f * g)(x) = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f * g \right) (x). \quad (\text{B.1})$$



Si además  $f$  y  $g$  son diferenciables:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)(x) = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) * g(x) \right) = \left( f(x) * \frac{\partial}{\partial x_i} g(x) \right).$$

Demostremos esto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} (f(x-y)g(y)) dy. \end{aligned}$$

Usando la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f(x-y) \right) g(y)dy = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) * g(x) \right).$$

Es importante mencionar que se deben dar las condiciones necesarias para derivar bajo el signo integral, es decir, la función  $f$  debe cumplir las condiciones (1) y (2) del teorema (A.1).

Por otro lado, si hablamos de la diferenciabilidad de una convolución, podemos dar el siguiente resultado:

**Teorema B.2** (Diferenciabilidad de una convolución). *Sea  $f$  una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sea  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  con soporte compacto. Entonces la convolución*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy,$$

*cumple que  $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$*

*Demostración.* Veremos solamente la demostración para la primera derivada, es decir,  $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$  puesto que el procedimiento es análogo para el resto de derivadas. Calculemos, en primer lugar, la derivada de  $(f * g)(x)$  usando la definición:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f * g)(x + he_i) - (f * g)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left[ \frac{g(x + he_i - y) - g(x - y)}{h} \right] dy$$

La cantidad entre corchetes converge uniformemente a  $\frac{\partial}{\partial x_i} g(x-y)$  (ver [19]), donde se demuestra esta afirmación por lo que podemos, mediante el teorema de convergencia dominada, pasar el límite dentro de la integral de manera que:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{\partial}{\partial x_i} g(x-y) dy = \left( f(x) * \frac{\partial}{\partial x_i} g(x) \right).$$

por lo que  $(f * g)(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ . □

Introduzcamos el teorema de convergencia dominada, que hemos utilizado con frecuencia a lo largo de este trabajo y, en particular, en la demostración del teorema anterior:

**Teorema B.3** (Teorema de convergencia dominada de Lebesgue). *Supongamos que  $(f_n)$  es una sucesión de funciones medibles, tales que  $f_n \rightarrow f$  punto a punto cuando  $n \rightarrow \infty$  y que, además,  $|f_n| \leq g$  para todo  $n$ , donde  $g$  es una función integrable. Entonces,  $f$  es integrable y se cumple:*

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Ver el libro de Browder [7, pág:231] donde aparece demostrado este teorema.



---

# APÉNDICE C

---

## DELTA DE DIRAC

---

Si recordamos el capítulo dos de este trabajo, aproximamos la solución fundamental del calor a la llamada Delta de Dirac cuando tomábamos un tiempo suficientemente pequeño.

La función Delta de Dirac no es propiamente una función, es una distribución o función generalizada introducida por el físico Paul Dirac. En física, la función delta  $\delta(x)$  representa una masa puntual, es decir, una partícula de masa unidad situada en el origen. Los siguientes resultados se pueden encontrar en los apuntes del curso de ecuaciones en derivadas parciales [13]

La Delta de Dirac en el punto  $x_0$  (representada por  $\delta(x - x_0)$ ) debe verificar formalmente:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x = x_0 \\ 0 & \text{si } x \neq x_0 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Se observa claramente que la Delta de Dirac no es una función estrictamente hablando, puesto que toma valores infinitos.

Es posible definir una función generalizada o distribución como límite de una familia de funciones clásicas.

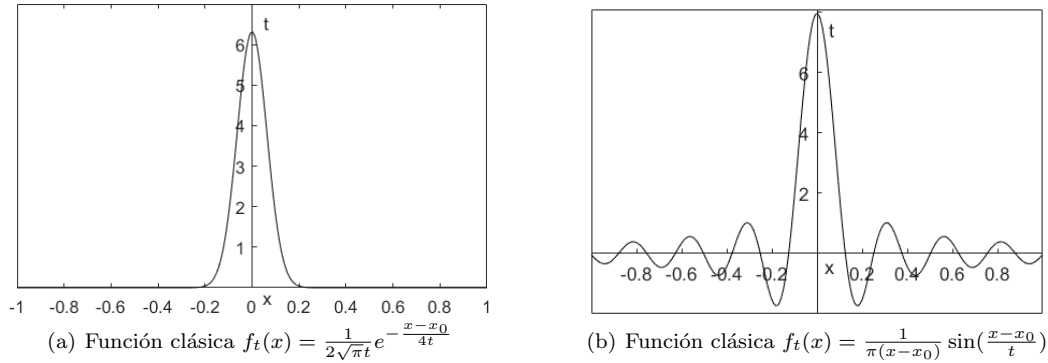


Figura C.1: Aproximaciones de la delta de dirac en el origen  $t_0 = 0$  mediante funciones clásicas

Así, para tener una imagen de la función  $\delta$  se consideran funciones de variable real  $x$  que sea cero fuera de un pequeño dominio de amplitud  $t$  alrededor del origen o del punto  $x_0$  y que dentro de este dominio la función sea igual a 1.

Una de las funciones clásicas que puede ser utilizada para definir la Delta de Dirac en un punto  $x_0$  es la solución fundamental del calor en una dimensión que viene dada por

$$f_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4t}}, \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0).$$

donde se cumple, por definición, que, suponiendo  $x_0 = 0$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(x) dx = 1. \quad (\text{C.2})$$

De la misma forma, la propiedad más importante de la delta de Dirac puede expresarse en la siguiente ecuación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \delta(x) dx = \psi(0). \quad (\text{C.3})$$

de nuevo tomando  $x_0 = 0$  y donde cada función  $\psi(x)$  es de clase  $C^\infty$  en un entorno de  $x_0$ . El intervalo de integración de la propiedad anterior puede ser cualquier entorno de  $x_0$  en el que la función no se anule. La demostración de esta propiedad puede verse en [13].

La propiedad anterior se puede escribir, teniendo en cuenta la ecuación (C.2), como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \psi(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(x) \psi(x) dx = \psi(0). \quad (\text{C.4})$$

## C.1. Delta de Dirac en n dimensiones

Sea  $x$  un vector  $n$  dimensional definimos la Delta de Dirac en el punto  $x_0 = 0$  en  $n$  dimensiones como

$$\delta(x) = \prod_{i=1}^n \delta(x_i)$$

donde cada variable  $x_i$  es independiente de las demás y así, la integración se realiza de manera independiente en cada dimensión.

Suponiendo a partir de ahora que tomamos la definición de Delta de Dirac en el punto  $x_0 = 0$  se tiene que, análogamente al caso de la Delta de Dirac en una dimensión, la función Delta de Dirac en  $\mathbb{R}^n$  puede aproximarse como límite de una familia de funciones clásicas. Particularmente, puede aproximarse como límite de solución fundamental del calor en  $n$  dimensiones, definida en el definición (3.1) como:

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0).$$

Comprobemos que esto es cierto.

En primer lugar se observa que, por las propiedades de las solución fundamental del calor estudiadas en el capítulo 3:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi(x, t) &= 0 \text{ cuando } x \neq 0. \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi(x, t) &= \infty \text{ cuando } x = 0. \end{aligned}$$

luego se cumplen las condiciones de la Delta de Dirac definidas en (C.1).

Además, debemos comprobar la propiedad (C.4). Para cada función  $\psi(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , de clase  $C^\infty$  en un entorno del origen tenemos que demostrar

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \psi(x) dx = \psi(0). \quad (\text{C.5})$$

Tomemos el límite anterior:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \psi(x) dx. \quad (\text{C.6})$$

Haciendo el cambio de variable:

$$z^2 = \frac{x^2}{4t} \Rightarrow x = 2\sqrt{t}z, \quad (x, z \in \mathbb{R}^n, t > 0).$$

de manera que,

$$dx = (2\sqrt{t})^n dz.$$

Así, sustituyendo en (C.6) tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} \psi(2\sqrt{t}z) (2\sqrt{t})^n dz &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(4t)^{n/2}}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} \psi(2\sqrt{t}z) dz = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} \psi(2\sqrt{t}z) dz. \end{aligned}$$

Metamos el límite dentro de la integral, para ello veamos que se cumplen las condiciones del Teorema de convergencia dominada para funciones integrables (B.2)

Sea

$$f_t(z) = e^{-|z|^2} \psi(2\sqrt{t}z), \quad (z \in \mathbb{R}^n, t > 0).$$

Sea  $\psi(x)$  una función de clase  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , es decir, una función infinitamente diferenciable y con soporte compacto.

Recordemos la definición de soporte compacto,

**Definición C.1** (Soporte Compacto [15]). *Sea  $f(x)$  una función cualquiera, se define el soporte compacto de  $f(x)$  como:*

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \neq 0\}}.$$

*es decir, el conjunto de puntos donde la función no es cero. De esta manera, se dice que una función tiene soporte compacto si la adherencia de conjunto donde no es nula conforma un conjunto cerrado y acotado.*

Así, al ser  $\psi(x), x \in \mathbb{R}^n$  una función continua con soporte compacto, tiene un máximo:

$$\psi(x) \leq M, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

donde M es una constante genérica. Por tanto, la sucesión de funciones integrables  $f_t(z)$  cumplen que:

$$|f_t(z)| \leq M |e^{-|z|^2}| \in L_1(\mathbb{R}^n).$$

Además, la sucesión  $f_t(z)$  converge puntualmente cuando  $t \rightarrow 0^+$  a la función:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f_t(z) = e^{-|z|^2} \psi(0), \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Así, según el teorema de convergencia cominada resulta que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} \psi(2\sqrt{t}z) dz &= \frac{1}{(\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-|z|^2} \psi(2\sqrt{t}z) dz = \frac{1}{(\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} \psi(0) dz = \\ &= \frac{1}{(\pi)^{n/2}} \psi(0) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz = \frac{1}{(\pi)^{n/2}} \psi(0) (\pi)^{n/2} = \psi(0). \end{aligned}$$

De donde la penúltima igualdad viene de la integral de Gauss. De esta manera, queda demostrada la propiedad (C.4) y hemos visto que la solución fundamental del calor en n dimensiones es una de las funciones clásicas que tienen cuyo límite es la función generalizada de la Delta de Dirac.

## C.2. Otras propiedades de la Delta de Dirac

Una de las propiedades más importantes de la Delta de Dirac relaciona esta con la convolución definida en el apéndice anterior.

Para cada función  $\phi \in C(\mathbb{R})$ , es decir,  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\phi$  de clase C, se verifica

$$\delta(t - t_0) * \phi(t) = \phi(t) * \delta(t - t_0) = \phi(t - t_0).$$

Particularmente,

$$\delta(t) * \phi(t) = \phi(t) * \delta(t) = \phi(t).$$

es decir, la Delta de Dirac en el origen  $t_0 = 0$  es el elemento neutro para el producto de convolución. De esta manera, según la definición (B.1) se tiene en el punto  $t_0 = 0$

$$(\delta(t) * \phi(t))(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-x)\phi(x)dx = \phi(t). \quad (\text{C.7})$$

Análogamente,

$$(\phi(t) * \delta(t))(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-x)\delta(x)dx = \phi(t).$$

---

# APÉNDICE D

---

## COORDENADAS POLARES EN $\mathbb{R}^N$

Una importante aplicación de los cambios de variable es el caso del cambio a coordenadas polares en  $\mathbb{R}^2$  y coordenadas esféricas en  $\mathbb{R}^3$ . Ahora, introduzcamos la generalización de este cambio de variable n dimensiones. Comencemos recordando los ejemplos para los casos  $n = 2$  y  $n = 3$ .

EJEMPLO 1. En  $\mathbb{R}^2$  definimos  $\phi : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  de manera que

$$\phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y).$$

La matriz jacobiana de esta función  $\phi$  es:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \phi_1(r, \theta) & \frac{\partial}{\partial \theta} \phi_1(r, \theta) \\ \frac{\partial}{\partial r} \phi_2(r, \theta) & \frac{\partial}{\partial \theta} \phi_2(r, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

De donde el jacobiano  $J_\phi(r, \theta) = r$ . Así,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta. \quad (\text{D.1})$$

Ahora podemos escribir un punto que se encuentre dentro del círculo unidad  $S^1$  como  $\gamma = (\cos \theta, \sin \theta)$ , que recibe el nombre de parte angular en las coordenadas polares. Por tanto, dada una función  $g$  en el círculo unidad, definimos su integral a lo largo de  $S^1$  como

$$\int_{S^1} g(\gamma) d\gamma = \int_0^{2\pi} g(\cos \theta, \sin \theta) d\theta.$$

Con esta notación tenemos que la ecuación (D.1) se transforma en

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{S^1} \int_0^\infty f(r\gamma) r dr d\gamma.$$

EJEMPLO 2. En  $\mathbb{R}^3$  usamos las coordenadas esféricas. definamos la función

$$\begin{aligned} \phi : (0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3. \\ (r, \theta, \varphi) &\rightarrow (x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

dadas por:

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \theta \cos \varphi. \\ x_2 = r \sin \theta \sin \varphi. \\ x_3 = r \cos \theta. \end{cases}$$

Calculando el Jacobiano análogamente al caso anterior, nos queda  $J_\phi(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta$ . Así

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (\text{D.2})$$

Si tomamos g una función en la esfera unidad  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$  y  $\gamma = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$  tenemos:

$$\int_{S^2} g(\gamma) d\gamma = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\gamma) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Por lo tanto, la ecuación (D.2) se transforma en:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{S^2} \int_0^\infty f(r\gamma) r^2 dr d\gamma.$$

donde se tiene que

$$\int_{S^2} d\gamma = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi.$$

De manera general (ver [22]), las coordenadas esféricas en  $\mathbb{R}^n$  vienen dadas por la aplicación  $x = g(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$  de una parte de  $\mathbb{R}^\infty$  en sí mismo, donde:

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta_1, \\ x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ \vdots \\ x_{n-1} = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}, \\ x_n = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}, \end{cases}$$

donde  $0 \leq \theta_i \leq \pi$  para  $1 \leq i \leq n-2$  y  $0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi$ ,  $r > 0$ . Así, el punto  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$  varía en el intervalo  $U = [0, \pi]^{n-2} \times [0, 2\pi]$  de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , de modo que  $(r, \theta)$  varía en el intervalo  $V = (0, \infty) \times U$ .

Probemos por inducción sobre n las siguientes afirmaciones:

I. Si  $x = g(r, \theta)$  entonces  $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ ;

II. El determinante de la matriz Jacobiana de este cambio de variables viene dado por:

$$J = r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2}.$$

Para probar las afirmaciones anteriores escribimos la aplicación g de la forma  $g = g_1 \circ g_2$  donde  $g_1$  y  $g_2$  se definen mediante los sistemas:

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{l} x_1 = x_1 \\ x_2 = r_1 \cos \theta_2 \\ (g_1) \ x_3 = r_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ \dots \\ x_n = r_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-1} \end{array} & \begin{array}{l} x_1 = r \cos \theta_1 \\ r_1 = r \sin \theta_1 \\ (g_2) \ \theta_2 = \theta_2 \\ \dots \\ \theta_{n-1} = \theta_{n-1} \end{array} \end{array}$$

Notemos que  $g_2$  transforma las dos primeras coordenadas en las coordenadas polares sobre el plano y actúa como la identidad para el resto de coordenadas. Por otro lado,  $g_1$  actúa como la identidad en la primera coordenada y el resto de coordenadas son análogas a la transformación g pero en el espacio (n-1) dimensional.

Teniendo esto en cuenta, demostremos la primera afirmación, es obvio que para n=2 (coordenadas polares sobre el plano) se cumple que:

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2.$$



Supongamos que es cierto para  $n-1$ , es decir, son ciertas para el espacio euclídeo de dimensión  $n-1$  en  $g_1$ . Por tanto, suponemos:

$$r_1^2 = x_2^2 + x_3^2 + \cdots x_n^2.$$

Para el caso en  $\mathbb{R}^n$ , teniendo en cuenta la hipótesis de inducción y que se cumple para  $n=2$  tenemos:

$$r^2 = x_1^2 + r_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots x_n^2.$$

Demostremos ahora la propiedad (2), para el caso  $n=2$  hemos visto que se cumple que el jacobiano

$$J = r.$$

Supongamos que la afirmación (2) es cierta para el caso  $n-1$ . Entonces tenemos que, denotando por  $J_i$  al jacobiano de  $g_i$  ( $i=1,2$ ) tenemos:

$$J_2 = \frac{\partial(x_1, r_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})}{\partial(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})} = \frac{\partial(x_1, r_1)}{\partial(r, \theta_1)} = r.$$

y por la hipótesis de inducción

$$J_1 = r_1^{n-2} \sin^{n-3} \theta_2 \sin^{n-4} \theta_3 \cdots \sin \theta_{n-2}.$$

Así, teniendo en cuenta que el jacobiano de la aplicación  $g$ , denotado por  $J$ , es  $J = J_1 J_2$  y reemplazando por el valor de  $r_1$ :

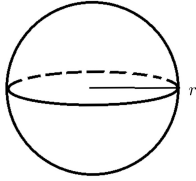
$$J = J_1 J_2 = r_1^{n-2} \sin^{n-3} \theta_2 \sin^{n-4} \theta_3 \cdots \sin \theta_{n-2} \cdot r = r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2}.$$

Por último, es importante mencionar el caso de integración en coordenadas polares en  $\mathbb{R}^n$ . (ver [14])

Todo punto de  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  puede escribirse de manera única como

$\mathbb{R}^n$

$$x = r\gamma.$$



donde  $\gamma$  (la parte angular) pertenece a  $S^{n-1}$ , la esfera unidad en  $\mathbb{R}^n$ , es decir cumple que  $|\gamma| = 1$ , y  $r > 0$ .

Así, si queremos calcular la integral de una función  $f(x)$  sobre  $\mathbb{R}^n$ , la integramos en primer lugar sobre la esfera de radio  $r$  centrada en el origen y, a continuación, añadir el resto de esferas hasta ocupar todo el espacio de  $\mathbb{R}^n$  (es decir, integrar la función con respecto del radio desde 0 hasta  $\infty$ ).

Figura D.1: Representación de la esfera  $n$ -dimensional de radio  $r$  centrada en el origen.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r\gamma) r^{n-1} dr d\gamma. \quad (D.3)$$

A la fórmula anterior se le llama fórmula de cóarea. Por otro lado, definimos el área de la esfera unidad  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  como

$$w_n = \int_{S^{n-1}} d\gamma \quad (D.4)$$

Se suele tomar  $r = |x|$  y  $\gamma = x/|x|$  (cumpliendo que  $x = r\gamma$ ) que cumple con la primera afirmación que hemos probado anteriormente,  $r = |x|$  es la distancia al origen, la norma euclídea en  $n$  dimensiones.

Particularmente, si la función es radial, tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) dx = w_n \int_0^\infty f(r) r^{n-1} dr.$$

### D.1. Medida de la esfera unidad en $\mathbb{R}^n$

Tal y como hemos mencionado previamente, el área de la esfera unidad en  $n-1$  dimensiones ( $S^{n-1}$ ) juega un papel importante en la integración en coordenadas polares en  $\mathbb{R}^n$ . Por lo tanto, dediquemos esta sección a calcular dicha área. (ver [14])

Tomemos, en primer lugar, la función

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = e^{-|x|^2},$$

donde  $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ . La integral de esta función en  $\mathbb{R}^n$  será:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} \dots e^{-x_n^2} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

como cada  $x_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) no depende del resto, podemos escribir la ecuación anterior de la forma

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} \dots e^{-x_n^2} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} dx_1 \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2} dx_2 \right) \dots \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_n^2} dx_n \right).$$

Cada una de las integrales anteriores es la llamada integral gaussiana o de Gauss, cuyo valor es  $\sqrt{\pi}$ . Así,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = (\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi}) \dots (\sqrt{\pi}) = (\pi)^{n/2}. \quad (\text{D.5})$$

Busquemos ahora otra forma de calcular la integral anterior (D.5).

La función  $f(x) = e^{-|x|^2}$  es una función radial, es decir, solo depende del valor absoluto de  $x$ . En otras palabras, si rotamos esta función, obtenemos la misma. De esta forma, tiene sentido, al estar hablando de una función radial, el uso de las coordenadas polares para calcular su integral.

Así, aplicando a esta función  $f(x)$  la fórmula de cóarea (D.3) en el caso particular en el que la función es radial tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} e^{-r^2} r^{n-1} dr d\gamma.$$

donde, recordando la definición de área de la esfera unidad  $S^{n-1}$  (D.4) tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = w_n \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr. \quad (\text{D.6})$$

Antes de continuar calculando esta integral, recordemos la definición de la función Gamma.

**Definición D.1.** Dado  $z > 0$  se define la función Gamma de  $z$  como la integral (ver [13]):

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Así, teniendo en cuenta esta definición, volvemos a la ecuación (D.6) que, realizando el cambio de variable  $r = s^{1/2}$  nos queda:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = w_n \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr = \frac{w_n}{2} \int_0^\infty s^{(n/2)-1} e^{-s} ds = \frac{w_n}{2} \Gamma(n/2) \quad (\text{D.7})$$

Por último, comparando las ecuaciones (D.7) y (D.5) tenemos:

$$(\pi)^{n/2} = \frac{w_n}{2} \Gamma(n/2) \Rightarrow w_n = \frac{2(\pi)^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

donde  $w_n$  es el área de la esfera unidad  $S^{n-1}$  que queríamos calcular.

# APÉNDICE E

## MÉTODO DEL PUNTO FIJO

Vamos a presentar uno de los métodos más utilizados para la búsqueda de soluciones en problemas no lineales. La idea básica detrás de este método consiste en producir una secuencia, mediante la iteración de una determinada aplicación, que converge a una solución del problema, demostrando así su existencia.

Consideremos, según el libro de Logan[20], una ecuación no lineal algebraica de la forma:

$$x = \phi(x). \quad (\text{E.1})$$

donde  $\phi$  es una función continua definida en  $\mathbb{R}$ . Seleccionando un punto inicial  $x_0$  y calculando de forma sucesiva:

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{E.2})$$

producimos una sucesión de puntos  $x_0, x_1, x_2, \dots$  que, bajo unas ciertas condiciones, convergen a una raíz de la ecuación (E.1). Supongamos que convergen a un número  $x'$  (es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x'$ ), tomando el límite en ambos lados de la ecuación (E.2) cuando  $n \rightarrow \infty$  y teniendo en cuenta la continuidad de la función  $\phi$  tenemos:

$$x' = \lim \phi(x_n) = \phi(\lim x_n) = \phi(x'),$$

de manera que  $x'$  es solución de la ecuación (E.1). Este proceso se denomina método del punto fijo, donde el punto fijo de la función  $\phi$  es  $x'$ . Sin embargo, si la gráfica de la función  $\phi$  es demasiado inclinada, tal y como se muestra en la figura (E.1) en la que la secuencia definida no converge a la solución o punto fijo  $x'$ . Entonces, ¿Cuándo convergerá el método del punto fijo?

Para garantizar la existencia de solución, supongamos que  $\phi(x)$  es una función continua en  $\mathbb{R}$  que satisface la condición de Lipschitz de la forma

$$|\phi(x) - \phi(z)| \leq k|x - z| \quad \forall x, z \in \mathbb{R}. \quad (\text{E.3})$$

donde  $k$  es una constante que cumple  $0 < k < 1$ . Bajo esta condición no es difícil observar que para cualquier elección del punto inicial  $x_0$ , el proceso iterativo (E.2) va a converger a la raíz de (E.1). Para probar esta afirmación vamos a mostrar que  $x_n$  es una sucesión de Cauchy de números reales y, por tanto, convergente.

En primer lugar, calculemos la distancia entre dos iteraciones consecutivas:

$$|x_{n+1} - x_n| = |\phi(x_n) - \phi(x_{n-1})| \leq k|x_n - x_{n-1}|.$$

Así, si tomamos  $|x_1 - x_0| = a$  tenemos

$$|x_2 - x_1| \leq ka, \quad |x_3 - x_2| \leq k^2a, \dots, |x_{n+1} - x_n| \leq k^n a.$$

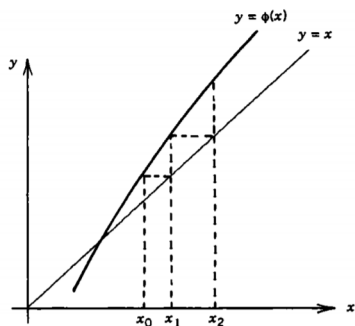


Figura E.1: Ejemplo gráfico del método de punto fijo divergente.

Ref: [20]

Con lo cual, para cualquier entero positivo  $p$  tenemos:

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \dots |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq ak^{n+p-1} + a^{n+p-2} + \dots + ak^n \\ &\leq ak^n(k^{p-1} + k^{p-2} + \dots + 1) \\ &< \frac{ak^n}{1-k}. \end{aligned}$$

La expresión final se obtiene de, en la primera desigualdad, sumar y restar todos los términos comprendidos entre  $x_{n+p}$  y  $x_n$  y usar la desigualdad triangular. Para conseguir la última desigualdad se emplea la expresión de la serie geométrica  $\sum k^n$  que es convergente sí y solo sí  $|k| < 1$ , lo cual se cumple gracias a la condición de Lipschitz (E.3) y cuya suma vale  $\sum k^n = 1/(1-k)$ .

De este modo, como  $k < 1$ , la diferencia  $|x_{n+p} - x_n|$  puede ser arbitrariamente pequeña si cogemos un  $n$  suficientemente grande, para todo  $p > 0$ . En otras palabras, dado  $\epsilon > 0$  cualquiera, existe un entero  $N > 0$  tal que  $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$  para  $n > N$  y para cualquier  $p > 0$ . Así, por definición, la sucesión es una sucesión de Cauchy y, por lo tanto, converge a algún  $x'$  que, tal y como hemos visto anteriormente, es una solución de (E.1). De hecho, puede demostrarse que esta solución es única (ver en el libro de Logan:[20]).

En EDOs estamos interesados en encontrar una solución de problemas con una condición inicial de la forma:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (\text{E.4})$$

donde  $t_0$  e  $y_0$  son constantes dadas y  $f$  es una función continua.

Podemos reescribir este problema integrando a ambos lados desde  $t_0$  hasta  $t$  para obtener

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds. \quad (\text{E.5})$$

La parte derecha de la ecuación se puede considerar como una aplicación  $\phi$  de un conjunto de aplicaciones continuas. Esto es, para cada función continua  $y$  existe otra función continua asociada  $\phi(y)$  definida para cada  $t$  como:

$$\phi(y(t)) \equiv y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

De manera que la ecuación (E.5) se puede escribir de la forma:

$$y(t) = \phi(y)(t). \quad (\text{E.6})$$

que tiene la misma estructura que la ecuación (E.1). Por lo tanto, podemos definir una secuencia de funciones  $y_0(t), y_1(t), y_2(t) \dots$  mediante la fórmula:

$$y_{n+1}(t) = \phi(y_n)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{E.7})$$

donde el primer iterando es  $y_0(t) = y_0$ . garantizamos la convergencia de esta sucesión y, de esta forma, la existencia de solución del problema (E.4) mediante el siguiente teorema cuya demostración no realizamos pero se puede ver en: [4]

**Teorema E.1.** Sea  $f(y, t)$  una función continua y asumamos que la función  $f$  cumple la condición de Lipschitz:

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq k|y - z|, \quad \forall y, z \in \mathbb{R} |t - t_0| \leq T.$$

Entonces, para cualquier  $y_0$  la sucesión  $y_n$  definida en (E.7) converge uniformemente en  $|t - t_0| \leq T$  y la función límite es una solución única del problema (E.4) en el intervalo  $|t - t_0| \leq T$ .

---

# APÉNDICE F

---

## ESPACIOS DE BANACH

Recordemos de los fundamentos de Álgebra Lineal, ver libro de Logan [20, pág:300-303], que un espacio real lineal (o espacio vectorial) es un conjunto de objetos (números, vectores, matrices...) entre los que se definen las aplicaciones suma y multiplicación por un escalar. En otras palabras, si  $X$  denota el conjunto de objetos y  $u, v$  están en  $X$  entonces  $u+v$  está definido y pertenece a  $X$  y  $au$  está definido y también pertenece a  $X$  para cualquier  $u$  en  $X$  y cualquier número real  $a$ . Además, satisface las propiedades asociativa, conmutativa, existencia de elemento neutro para la suma y el producto y existencia de elemento inverso para la suma. Cualquier conjunto que cumpla las anteriores propiedades se denomina *Espacio Vectorial*.

Si para cada  $u$  en un espacio vectorial  $X$  hay asociado un número no negativo, denotado por  $\|u\|$ , satisfaciendo las propiedades

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0; \quad \|au\| = 0 = |a|\|u\| \text{ con } a \in \mathbb{R}, u \in X;$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \text{ con } u, v \in \mathbb{R}.$$

entonces  $X$  es un espacio vectorial normado donde  $\|\cdot\|$  se llama norma en  $X$ .

Una propiedad fundamental de los números reales nos dice que las sucesiones de Cauchy convergen. Especialmente, si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de números reales que cumple que para todo número real  $\epsilon > 0$  existe un entero positivo  $N$  tal que  $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$  para todo  $n > N$  y  $p > 0$ , entonces la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a un número real. Sin embargo, es necesario mencionar que toda sucesión convergente es de Cauchy pero no toda sucesión de Cauchy es convergente, aunque en el caso de las sucesiones de números reales sí que se da dicha reciprocidad.

Podemos generalizar esta noción para el caso de un espacio vectorial normado  $X$ : Decimos que  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $X$  sí, y solo sí, para todo número real  $\epsilon > 0$  existe un entero positivo  $N$  tal que  $\|x_{n+p} - x_n\| < \epsilon$  para todo  $n > N$  y  $p > 0$ .

Decimos que un espacio vectorial normado  $X$  es completo si toda sucesión de Cauchy contenida en  $X$  converge a un elemento de  $X$ . Un espacio vectorial normado y completo se denomina *Espacio de Banach*.

**Ejemplo F.1.** Algunos ejemplos extraídos de [20] de espacios de Banach son::

- Los espacios euclidianos,  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{C}^n$ , donde la norma euclidiana de  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  está dada por  $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{1/2}$ .
- El espacio de las funciones continuas  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o, análogamente,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  definidas sobre un intervalo compacto (cerrado y acotado)  $[a, b]$  tienen estructura de espacio de Banach si definimos la norma como:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

El espacio de Banach resultante se denota  $C[a, b]$ .

- Espacios de sucesiones  $\ell^p$

$$\ell^p(\mathbb{R}) := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=k}^{\infty} |x_k|^p < \infty\}.$$

donde  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es una sucesión infinita de elementos de  $\mathbb{R}$ . La norma de una de estas sucesiones se define como el supremo de los valores absolutos de los miembros de la sucesión. De la misma manera se puede definir este espacio para sucesiones de elementos  $\mathbb{C}$

- Espacio de funciones  $L^p$  : si  $p$  es un número real con  $0 \leq p < \infty$  podemos considerar las funciones  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty.$$

donde la norma se define como la raíz  $p$ -ésima de esta integral.

Ahora vamos a introducir un resultado fundamental que nos va a llevar a un teorema de existencia de solución de ecuaciones en derivadas parciales no lineales (ver proceso en el Capítulo 4 de este trabajo).

Sea  $X$  un espacio de Banach y supongamos que  $\Phi : X \rightarrow X$  es una aplicación en  $X$ . Si  $\Phi$  tiene la propiedad de que:

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\| \leq \alpha \|u - v\|.$$

para todo  $u, v \in X$  y para alguna constante  $\alpha$  con  $0 < \alpha < 1$  entonces  $\Phi$  es una *Aplicación Contractiva* y podemos enunciar el siguiente teorema [20]:

**Teorema F.1** (Teorema del Punto Fijo de Banach). *Si  $\Phi : X \rightarrow X$  es una aplicación contractiva en un espacio de Banach  $X$ , entonces  $\Phi$  tiene un único punto fijo*

*Demostración:* Demostremos, en primer lugar, que si el punto fijo existiera, este es único. Sean  $x_1, x_2$  dos puntos fijos de  $X$  tales que  $x_1 \neq x_2$ . Entonces, si  $\Phi(x_1) = x_1$  y  $\Phi(x_2) = x_2$ , tenemos que

$$\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| = \|x_1 - x_2\|.$$

con lo cual llegamos a una contradicción con la hipótesis de que  $\Phi$  es una función contractiva (recordemos que en la definición de función contractiva la constante  $k$  es siempre menor que uno).

La demostración de la existencia del punto fijo es análoga a la realizada en el apéndice (E) que garantizaba la existencia de punto fijo para las funciones que satisfacen la condición de Lipschitz. La prueba para los espacios de Banach sigue exactamente el mismo argumento reemplazando los valores absolutos por normas.  $\square$

Por último, cabe mencionar que normalmente la función  $\Phi$  no es una aplicación contractiva en la totalidad del espacio de Banach sino solamente en un subconjunto cerrado del espacio (un conjunto  $G$  en un espacio de Banach  $X$  es cerrado si cualquier sucesión convergente en  $G$  tiene su límite en  $G$ ). Es evidente la demostración de que el teorema del punto fijo es válido sobre subconjuntos cerrados de un espacio de Banach.